**Контролна работа за определяне Отбора на България за МБОМ 2022**
*Първи ден, 14.5.2022*

**Задача 1.** Съществуват ли естествени числа $a$, $b$, $c$ и $d$, такива че:

а) $a^{2021} + b^{2023} = 11(c^{2022} + d^{2024})$?

б) $a^{2022} + b^{2022} = 11(c^{2022} + d^{2022})$?

**Решение.** а) Да! Ще се стремим към $a^{2021}=11c^{2022}$ и $b^{2023}=11d^{2024}$. Нека $a=11^x$, $c=11^y$, $b=11^z$, $d=11^t$ – искаме $2021x=2022y+1$, $2023z=2024t+1$; тези са верни например за $x=2021$, $y=2020$, $z=2023$, $t=2022$.

б) Не! Остатъците на точните квадрати при деление на 11 са 0, 1, 4, 9, 5 и 3, следователно сума на два квадрата се дели на 11 точно когато основите им се делят на 11. С други думи, непременно $a^{1011}$ и $b^{1011}$ се делят на 11 и значи $a$ и $b$ се делят на 11. Оттук лявата страна се дели на $11^2$ и значи $c^{2022}+d^{2022}$ се дели на 11, откъдето аналогично $c$ и $d$ се делят на 11. При $a=11a_1$, $b=11b_1$, $c=11c_1$, $d=11d_1$ след съкращаване на $11^{2022}$ получаваме $a_1^{2022} + b_1^{2022} = 11(c_1^{2022} + d_1^{2022})$, което е като началното уравнение, но с по-малки числа. Продължавайки така, ще стигнем до аналогично уравнение, но такова че поне едно от числата в лявата страна няма да се дели на 11 (тъй като $a$, $b$, $c$, $d$ са ненулеви). Така началното уравнение няма решение.

**Оценяване:** 5 т. за а), от които 2 т. за приравняване на събираеми по двойки и 3 т. за довършване; 5 т. за б), от които 1 т. за разглеждане на ниски степени по модул 11, 2 т. за извод, че $a$ и $b$ се делят на 11, 1 т. за съкращаване на $11^{2022}$ и 1 т. за довършване.

**Задача 2.** Положителните числа $a$, $b$, $c$ са с произведение 1. Да се намери най-малката възможна стойност на израза

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)$$

и всички тройки $(a, b, c)$, при които тя се достига.

**Решение.** Вторият множител е равен на $\frac{1}{ac+bc}+\frac{1}{ab+ac}+\frac{1}{ab+bc}$ и значи от формата на неравенството на Коши-Буняковски-Шварц, известна като „Хубаво неравенство“ (ХН), той е по-голям или равен на $\frac{9}{2(ab+bc+ca)}$. Първият множител е равен на $a^2c + b^2a + c^2b$. От неравенството между средноаритметично и средногеометрично имаме $a^2c + a^2c + c^2b \geq 3\sqrt[3]{a^4bc^4} = 3ac$; събирайки с аналогичните и разделяйки на 3, получаваме $a^2c + b^2a + c^2b \geq ab + bc + ca$. Така търсената най-малка стойност е $\frac{9}{2}$ и (например понеже прилагането на ХН тук форсира $ac + bc = ab + ac = ab + bc$, т.е. $a = b = c$, като условие за равенство) се достига само при $a = b = c = 1$.

**Оценяване.** 1 т. за пренаписване на втория множител във вид, удобен за ХН, 2 т. за успешно прилагане на ХН върху този множител, 1 т. за пренаписване на първия множител във вид без дроби, 4 т. за доказване на $a^2c + b^2a + c^2b \geq ab + bc + ca$ (от които най-много 1 т. за неуспешни опити чрез САСГ или $c = \frac{1}{ab}$), 1 т. за напълно коректен отговор (стойност $\frac{9}{2}$ и тройката $(1,1,1)$) и 1 т. за обосновка защо няма тройки освен $(1,1,1)$, които достигат равенство

**Задача 3.** Нека означим с $t_n$ броя на различните ненаредени тройки непразни непресичащи се подмножества на $n$-елементно множество. Например $t_3=1$. Намерете затворена формула, изразяваща $t_n$ чрез $n$, и пресметнете последната цифра на $t_{2022}$.

**Решение.** Да преброим първо наредените тройки. За всеки елемент на $n$-елементното множество има 4 възможности: да е в първото, второто, третото подмножество или да не е в никое от тях. Така имаме $4^n$ начина да сформираме тройката.

От получените $4^n$ наредени тройки трябва да изключим вариантите, при които някое от трите подмножества е празно; има 3 избора кое да е то, а за всеки елемент на $n$-елементното множество има 3 възможности: да е в първото или второто от другите подмножества или да не е в никое от тях, общо $3.3^n$ варианта.

Сега трябва да включим обратно вариантите, при които две от трите подмножества са празни; има 3 избора кои да са те, а за всеки елемент на $n$-елементното множество има 2 възможности: да е или да не е в останалото подмножество: $3.2^n$ варианта.

Накрая трябва да изключим варианта, при които и трите подмножества са празни.

Тъй като всяка ненаредена тройка съответства на $3!=6$ наредени, окончателно получаваме $t_n=(4^n-3.3^n+3.2^n-1)/6$. При $n=2022$ по модул 4 изразът в скобите е $0-3+0-1\equiv 0$, така че $t_{2022}$ е четно; по модул 5 изразът в скобите е $1-2+2-1\equiv 0$, така че $t_{2022}$ е кратно на 5; следователно последната цифра на $t_{2022}$ е 0.

**Оценяване:** За доказване във формулата за $t_n$ на: ($4^n$: 1 т.); ($-3.3^n$: 2 т.); ($+3.2^n$: 2 т.); ($-1$: 1 т.); (/6: 1 т.); за остатъка на $t_{2022}$ при деление с: (2: 1 т.); (5: 1 т.); завършване: 1 т.

**Задача 4.** В остроъгълен триъгълник $ABC$ ($AC<BC$) с описана окръжност $k$ и среда $P$ на страната $AB$ височините $AM$ ($M\in BC$) и $BN$ ($N\in AC$) се пресичат в точка $H$. Точката $E$ от $k$ е такава, че отсечките $CE$ и $AB$ са перпендикулярни. Правата $EP$ пресича $k$ за втори път в точка $K$, а точка $Q\in k$ е такава, че отсечките $KQ$ и $AB$ са успоредни. Описаната около триъгълника $AHB$ окръжност пресича отсечката $CP$ във вътрешна точка $R$. Да се докаже, че точките $C, M, R, H, N$ и $Q$ лежат на една окръжност.

**Решение.** Първо ще отбележим, че $CMHN$ е вписан в окръжността $\omega$ с диаметър $CH$, понеже $\sphericalangle CMH=\sphericalangle CNH=90°$. Нека $S$ е петата на перпендикуляра от $H$ към $CP$; ще докажем, че $S\equiv R$. Явно $S\in\omega$, откъдето $\sphericalangle MSC=\sphericalangle MHC=\sphericalangle ABC=\sphericalangle PBM$ и значи $BPSM$ е вписан. Оттук $\sphericalangle BSP=\sphericalangle BMP=\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BAH+\sphericalangle BSH=\sphericalangle BAH+90°+\sphericalangle ABC=180°$, откъдето $AHSB$ е вписан и $S\equiv R$, като $\sphericalangle HSC=90°$ гарантира, че $R$ лежи на $\omega$.

Остава да докажем, че $Q$ лежи на $\omega$. Ако $X$ е симетричната точка на $H$ относно $P$, то $AXBH$ е успоредник, $\sphericalangle AXB=\sphericalangle AHB=180°-\sphericalangle ACB$, т.е. $X\in k$ и $\sphericalangle XAC=\sphericalangle BNC=90°$, т.е. $X$ е диаметралнопротивоположната точка на $C$ в $k$. Нататък, нека $HX$ пресича $k$ за втори път в точката $T$; ще докажем, че $T\equiv Q$. Тъй като $CX$ е диаметър в $k$, имаме $\sphericalangle CEX=90°$ и $EP=PX$ от триъгълника $HEX$, в който $EP$ е медиана към хипотенузата. Така дъгите $XK$ и $TE$ в $k$ са равни и $EXKT$ е равнобедрен трапец, т.е. $EX||KT$. От друга страна, $KQ||AB$ и $AB||EX$ поради перпендикулярните $CE$ и $AB$ и $\sphericalangle CEX=90°$, следователно $EX||KQ$ и значи $T\equiv Q$. Остава да съобразим, че $\sphericalangle CQH=\sphericalangle CQX=90°$, понеже $CX$ е диаметър в $k$, откъдето окончателно $Q$ лежи на $\omega$.

**Оценяване:** 1 т. за $CMHN$ – вписан, 2 т. за доказване, че $R$ лежи на окръжността с диаметър $CH$ (от тях 1 т. за вписаността на $BPRM$ или аналогичен четириъгълник), 1 т. за въвеждането на $X$ и известния факт, че $X$ е диаметралнопротивоположна на $C$ в $k$, 1 т. за $EP=PX$, 2 т. за $EX||KT$, 2 т. за $T\equiv Q$ и 1 т. за заключение, че $Q$ лежи на окръжността с диаметър $CH$.