Контролна работа за определяне Отбора на България за МБОМ 2022

Втори ден, 15.5.2022

Задача 5 Да се намерят всички тройки реални числа (a, b, c), такива че

$$(2a+1)^2-4b=(2b+1)^2-4c=(2c+1)^2-4a=5.$$

Отговор. $(1,1,1)$ и $(-1,-1,-1)$.

Решение. Системата е еквивалентна на $a^2+a-b=b^2+b-c=c^2+c-a=1$. Събиране на трите води до $a^2+b^2+c^2=3$. От друга страна $a(a+1)=b+1$, $b(b+1)=c+1$, $c(c+1)=a+1$ и умножаването на трите и разделяне на $(a+1)(b+1)(c+1)$ (ако $a, b, c\neq -1$) води до $abc=1$. От неравенството между средноаритметично и средногеометрично за неотрицателните $|a|$, $|b|$, $|c|$ получаваме $a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{|abc|}=3$, като равенство се достига само при $|a|=|b|=|c|=1$, така че предвид горното $a^2+b^2+c^2=3$ и a, b, $c\neq -1$ получаваме, че $a=b=c=1$ е единствената друга възможна тройка (тя наистина е решение на дадената система). Остава да отбележим, че ако някое от a, b, c е (-1), без ограничение a, то от първото уравнение следва $b=-1$, от второто следва $c=-1$ и третото е изпълнено.

Оценяване: 2 т. за $a^2+b^2+c^2=3$, 3 т. за $abc=1$при $a,b,c\neq -1$, 3 т. за заключението, че $a=b=c=1$при $a,b,c\neq -1$ (като се отнема 1 т. ако САСГ е прилагано върху не непременно неотрицателни числа), 1 т. за случая $a=-1$ (или аналогичен) и 1 т. за верен отговор

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с $AB<AC$ и описана окръжност k. Допирателната към k в точка A пресича правата BC в точка D, а точката $E\neq A$ от k е такава, че DE допира k. Точката X върху правата BE е такава, че B е между E и X и $DX=DA$, а точката Y върху правата CX е такава, че Y е между C и X и $DY=DA$. Да се докаже, че правите BC и YE са перпендикулярни.

Решение. Понеже $\sphericalangle ECD=\sphericalangle BED=\sphericalangle XED=\sphericalangle EXD$, четириъгълникът $CEDX$ е вписан. Точките A, E, X, Y лежат на окръжност с център D, откъдето $\sphericalangle YDE=2\sphericalangle YXE=2\sphericalangle CXE=2\sphericalangle CDE$, т.е. $\sphericalangle YDC=\sphericalangle CDE$. Така триъгълниците YCD и ECD са еднакви по първи признак и CD е симетрала на YE. Исканото следва.

Оценяване: 4 т. за доказване на вписаността на $CEDX$, 2 т. за свеждане до еднаквостта на YCD и ECD (или еквивалентно) и 4 т. за доказателство на$\sphericalangle YDC=\sphericalangle CDE$.

Задача 7. Целите числа a, b, c, d са такива, че $d\leq 2022$, числата a и b са взаимнопрости и $a+b+c+d=ac+bd=0$. Намерете най-голямата възможна стойност на d.

Отговор. 2016

Решение. Замествайки $d=-a-b-c$ в $ac+bd=0$, получаваме $(a-b)c=ab+b^2$. Ако допуснем, че $a=b$, то $2a^2=ab+b^2=0$ и $a=b=0$, които не са взаимнопрости. Така $a\neq b$ и получаваме $c=\frac{ab+b^2}{a-b}$, $d=\frac{ab+a^2}{b-a}$. Числата $a-b$ и a са взаимнопрости, понеже ако x дели $a-b$ и a, то x дели $a-(a-b)=b$ и условието дава $x=\pm 1$. Така понеже d е цяло число, получаваме, че $a-b$ дели $a+b$, откъдето $a-b$ дели $2a$ и значи $a-b$ дели 2, т.е. $a-b=\pm 1$, ± 2, като във втория случай a, b са нечетни (иначе няма да са взаимнопрости). Оттук получаваме, че всички решения са четворките $(b+1,\ b,\ 2b^2+b,\ -2b^2-3b-1)$, $(b-1,\ b,\ b-2b^2,\ 2b^2-3b+1)$, където b е произволно цяло число, както и $(b+2, b, b^2+b, -b^2-3b-2)$, $(b-2, b, b-b^2, b^2-3b+2)$, където b е произволно нечетно число. Понеже $-2b^2-3b-1\leq 0 \Leftrightarrow (2b+1)(b+1)\geq 0$ и $-b^2-3b-2\leq 0 \Leftrightarrow (b+1)(b+2)\geq 0$, остава да максимизираме $2b^2-3b+1=(2b-1)(b-1)$и $b^2-3b+2=(b-1)(b-2)$. Първият израз е равен на 1953 при $b=32$, поне 2080 при $b\geq 33$, на 2016 при $b=-31$ и поне 2145 при $b\leq -32$ (и по-малък от 2016 в останалите случаи). Вторият израз е равен на 1980 при $b = 46$ и (-43), поне 2070 при $b \geq 47$ и $b \leq -44$ (и по-малък от 1980 в останалите случаи).

Оценяване: 1 т. за отхвърляне на $a = b$, 1 т. за вярно изразяване наcи/илиdчрез aи b, 1 т. за обосновка, че $a - b$е взаимнопросто с a (или с b), 3т. за свеждане до $a - b = \pm 1, \pm 2$,1 т. за получаване на решенията при $a - b = -1, -2$, 1 т. за $d \leq 0$при $a - b = 1, 2$, 1 т. за довършване на обосновката за максимума на dи 1 т. за верен отговор.

Задача 8. Около кръгла маса има $n \leq 99$ души. Отначало някои от тях са честни, а останалите – лъжци. Всяка минута всеки едновременно ще отговаря на въпроса „Какъв е левият ти съсед – честен или лъжец?" и веднага след това ще става такъв, какъвто е даденият от него отговор. Намерете най-голямото възможно n, за което е сигурно, че без значение кои са честни отначало, след известно време всички ще станат честни завинаги.

Решение. Да заместим честните хора с 1, а лъжците с -1. Тогава всяка минута всяко от числата се умножава по това вляво от него. Да допуснем, че от начална конфигурация, включваща както 1, така и -1, след няколко хода за пръв път всички числа са станали равни на 1. Тогава един ход по-рано всички числа са били равни на -1 (така че това не е началното положение), а два хода по-рано са били алтернативно 1, -1, 1, -1, ..., така че трябва n да е било четно. Сега нека $n=2k$ е четно и числата са a_1, a_2, ..., a_{2k} по часовниковата стрелка. След един ход те се заменят с a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{2k}a_1$, а след два хода стават a_1a_3, a_2a_4, ... , $a_{2k-1}a_1$, $a_{2k}a_2$. Така положението след два хода се получава от преплитането на положенията след един ход на числата, намиращи се на нечетните и на четните места. Ако k е нечетно, то съгласно горното невинаги ще се получава редица само от 1. Ако k е четно, можем да повторим операцията още веднъж и т.н. И така, ако n има нечетен делител, по-голям от 1, то може никога да не се появи конфигурация, състояща се само от единици. А ако $n=2^s$, с индукция по s доказваме, че най-късно след 2^s хода всички числа са 1. При $s=1$ твърдението е ясно, а стъпката следва от горното наблюдение, че два поредни хода в редицата a_1, a_2, ..., a_{2k} са равносилни на по един ход в редицата от нечетните и в редицата от четните места. Най-голямата точна степен на 2, за която $n \leq 99$, е $n=64$.

Оценяване: 1 т. за необходимостта n да е четно, 2 т. за доказване, че положението след два хода се получава от преплитането на нечетните и четните, 3 т. за доказване, че n няма нечетен делител, по-голям от 1, 3 т. за доказване, че твърдението е вярно за степените на двойката, 1 т. за верен отговор.