Контролна работа за определяне Отбора на България за МБОМ 2022
Бараж, 18.5.2022

Задача 9. Намерете броя на наредените тройки (a,b,c) от естествени числа, по-малки или равни на 2022, за които съществуват естествени числа (x,y,z), такива че $ab+1=x!$, $bc+1=y!$ и $ac+1=z!$.

Отговор: 13. **Решение.** Без ограничение на общността $a\ge b\ge c$. Тогава $z!=ac+1\le ab+1=x!$, откъдето $z\le x$ и значи $z!$ дели $x!$, т.е. $ac+1$ дели $ab+1$. Оттук $ac+1$ дели $a(b-c)$ и понеже $ac+1$ и a са взаимнопрости, получаваме, че $ac+1$ дели $b-c$. Ако допуснем, че $b>c$, ще получим $ac+1>a\ge b>b-c$, противоречие. Следователно $b=c$. Оттук $b^2+1=y!$. Понеже $b^2+1\ge 2$ не се дели на 3, непременно $y\le 2$ и $b=c=1$, а значи и $a=x!-1$ за $2\le x\le 6$. Предвид приетото $a\ge b\ge c$ в началото и това, че $(1,1,1)$ не се променя при размяна на кои да е от числата, търсеният брой е $3.4+1=13$.

Оценяване: 1 т. за наредбата на a,b,c и на x,y,z, 1 т. за $ac+1$ дели $ab+1$, 1 т. за $ac+1$ дели $a(b-c)$, 2 т. за $ac+1$ дели $b-c$, 2 т. за отхвърляне на $b>c$, 1 т. за отхвърляне на $b=c\ge 2$, 1 т. за правилно описание на решенията; 1 т. за верен отговор.

Задача 10. Реалните числа x, y и z са такива,че $x^2+y^2+z^2=1$. Да се намерят най-малката и най-голямата възможни стойности на $xy+yz-zx$.

Отговор: -1 и $\frac{1}{2}$. **Решение.** Имаме $xy+yz-zx\ge-(x^2+y^2+z^2)=-1$ поради $(x+y)^2+(y+z)^2+(x-z)^2\ge 0$, с равенство например за $x=-y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Също $xy+yz-zx\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=\frac{1}{2}$ поради $(x+z-y)^2\ge 0$, с равенство например при $x=0$, $y=z=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Оценяване: Общо 1т. за верен отговор за най-малката стойност (нмс) и тройка, която я достига; 3т. за доказателство за нмс. Общо 1т. за верен отговор за най-голямата стойност (нгс) и тройка, която я достига; 5 т. за доказателство за нгс.

Задача 11. Дадени са естествени числа m, n и таблица $m\times 2n$. Какъв най-голям брой правоъгълници $1\times(n+1)$ (може и завъртени) можем да изрежем от нея, ако: а) $m=2022$ и $n=3$? б) $m=2n$?

Решение. а) Търсеният брой е не повече от $2022.6:4=3033$. Нека предположим, че сме успели да изрежем 3033, т.е. да няма остатък. Да оцветим в черно четните полèта от четните редове; Черните полèта са 3033 и всеки правоъгълник 1×4 покрива 0 или 2 от тях, така че 3033 е четно: абсурд. Следователно търсеният брой е не повече от 3032. Пример: нарязваме 2022×4 на 1×4 и два пъти 2020×1 на 4×1: общо $2022+2.505=3032$ правоъгълника.

б) Заради лицата търсеният брой е не повече от $[4n^2:(n+1)]=[4(n^2-1):(n+1)+4:(n+1)]=4(n-1)+[4:(n+1)]$, където $[x]$ означава цялата част на x. Ако $n\ge 4$, получаваме $4n-4$, като за пример можем да оставим в центъра квадрат 2×2, а остатъка да заобиколим с 4 правоъгълника $(n+1)\times(n-1)$, всеки от които да нарежем на по $n-1$ броя от желаните.

При $n=1$ явно 2×2 може да се разреже на 2 правоъгълника 1×2.

При $n=2$ броят е не повече от $[16:3]=5$; това може да стане, ако един 4×3 се нареже на 4 от желаните, а петият да се отреже от оставащата лента 4×1.

При $n=3$ броят е не повече от $36:4=9$. Да допуснем, че можем да отрежем 9, т.е. няма остатък. Да оцветим в черно четните полèта от четните редове; Черните полèта са 9 и всеки правоъгълник 1×4 покрива 0 или 2 от тях, така че 9 е четно: абсурд. Следователно търсеният брой е не повече от 8. Примерът за 8 е като в случая $n\ge 4$.

Оценяване: а) 3т. б) 3т. за $n\ge 4$; 1т. общо за $n=1$ и $n=2$; 2т. за $n=3$; 1т. за завършване.

Задача 12. Остроъгълният триъгълник ABC $(AC<BC)$ е вписан в окръжност k с център O. Височината CD $(D\in AB)$ пресича k за втори път в точка E, а точката F от отсечката CD е такава, че $CE=2FD$. Да се докаже, че правата през F, перпендикулярна на OF, правата AB и допирателната към k в точката E се пресичат в една точка.

Решение. Нека H е ортоцентърът на ABC и M е средата на AB. От известните свойства $HD=DE$ и $CH=2OM$, заедно с условието $CE=2FD$ и с $CD||OM$, получаваме, че F е средата на CH и $FHMO$ е успоредник. Понеже $HD=DE$, триъгълникът MHE е равнобедрен с $\sphericalangle MHE=\sphericalangle MEH$, откъдето $\sphericalangle OFE=\sphericalangle MHE=\sphericalangle MEF$ и четириъгълникът $FOME$ е равнобедрен трапец, а значи и вписан в окръжност. Ако допирателната към k в E пресича AB в точката S, то от $\sphericalangle SEO=\sphericalangle SMO=90°$ получаваме, че $SEMO$ е вписан. Така $SEMOF$ е вписан в окръжността с диаметър OS и $\sphericalangle SFO=90°$. Резултатът следва.

Оценяване: 1т. за въвеждане на S с цел да се докаже $\sphericalangle SFO=90°$, 1т. за въвеждане на H и $HD=DE$, 1т. за въвеждане на M и $CH=2OM$, 4т. за вписаност на $FOME$, 1т. за вписаност на $SEMO$ и 2т. за довършване.