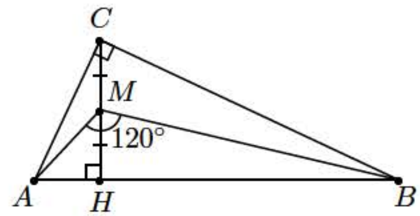
**Министерство на образованието и науката**
**Съюз на математиците в България**

# Пролетни математически състезания
# 9-12 клас

**Плевен, 31 март – 2 април 2014 г.**

**Задача 10.1.** Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $AC \leqq BC$). Ако $M$ е средата на височината $CH$ ($H \in AB$) и $\sphericalangle AMB = 120^\circ$, то да се намери $AC : BC$.

**Решение.** Ще използваме стандартните означение за $\triangle ABC$. Първо да обърнем внимание, че




$$S_{ABC} = 2S_{ABM} = AM.BM.\sin 120^\circ$$

и следователно $AM.BM = \dfrac{ab}{\sqrt{3}}$. От друга страна, от косинусова теорема за $\triangle ABM$ получаваме

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM.BM.\cos 120^\circ = AM^2 + BM^2 + AM.BM$$

и следователно

$$AM.BM = AB^2 - (AH^2 + HM^2) - (BH^2 + HM^2) = 2AH.BH - 2HM^2 = \frac{3}{2}h^2 = \frac{3a^2b^2}{2(a^2+b^2)}.$$

Така достигаме до $\dfrac{ab}{\sqrt{3}} = \dfrac{3a^2b^2}{2(a^2+b^2)} \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 - 3\sqrt{3}\left(\dfrac{b}{a}\right) + 2 = 0$ и понеже $b \leqq a$ следва, че $AC : BC = \dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4}$.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за $AM.BM = \dfrac{ab}{\sqrt{3}}$; 2 т. за $AM.BM = \dfrac{3a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$; 2 т. за $AC : BC = \dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4}$.

**Задача 10.2.** Да се намерят стойностите на параметъра $a$, при които уравненията

$$a.5^{2x-1} + |a-5|.5^{x-1} = 1 \quad \text{и} \quad 9^x + 3^{x+1} = 4$$

са еквивалентни.

**Решение.** Записваме второто уравнение във вида $(3^x-1)(3^x+4)=0$, но $3^x+4>0$ и остава $3^x-1=0$, т.е. $x=0$. Следователно необходимо условие двете уравнения да са еквивалентни е $x=0$ да е корен на първото уравнение. След заместване получаваме $a+|a-5|=5 \Leftrightarrow a\leqq 5$. При $a\leqq 5$ първото уравнение добива вида

$$a.5^{2x-1}+(5-a).5^{x-1}-1=0 \Leftrightarrow a.(5^x)^2+(5-a)5^x-5=0 \Leftrightarrow (5^x-1)(a5^x+5)=0.$$

Ако $a\geq 0$ или $a=-5$, то достигаме до единствено решение $x=0$. Ако $a<0$ и $a\neq -5$, получаваме две различни решения $x=0$ и $x=1-\log_5(-a)$. Така окончателно търсените стойности на $a$ са $[0,5]\cup\{-5\}$.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за решаване не второто уравнение и достигане до необходимото условие $a\leqq 5$; 4 т. за получаване на окончателния отговор.

**Задача 10.3.** Даден е четириъгълник $ABCD$, вписан в окръжност $k$ с диаметър 1. Да се намери най-голямата възможна стойност на сумата от радиусите на окръжностите, вписани в $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$.

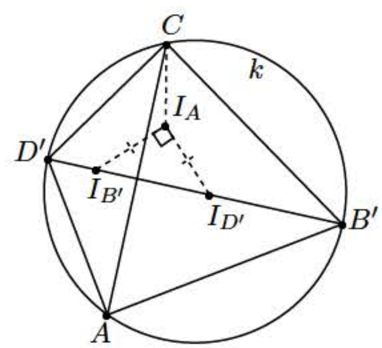
**Решение.** Ще използваме следното помощно твърдение:

*Лема 1.* Нека $XY$ е хорда в окръжност $\omega$ и точката $Z$ обхожда дъгата $\widehat{XY}$. Тогава радиусът $r_{XYZ}$ на вписаната в $\triangle XYZ$ окръжност достига максимума си, когато $Z$ е среда на дъгата $\widehat{XY}$.

*Доказателство.* Ако $I$ е центъра на вписаната в $\triangle XYZ$ окръжност, то $\sphericalangle XIY = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\sphericalangle XZY$ и следователно когато $Z$ обхожда дъгата $\widehat{XY}$, $I$ също обхожда някаква дъга с краища $X$ и $Y$. При това е очевидно, че разстоянието от $I$ до $XY$ е максимално точно когато $I$ съвпада със средата на тази дъга, т.е. когато $Z$ е среда на $\widehat{XY}$.

От горната лема следва, че

$$r_{ABC}+r_{ADC}\leqq r_{AB'C}+r_{AD'C},$$




където $B'$ и $D'$ са средите на съответните дъги $\widehat{ABC}$ и $\widehat{ADC}$. Ако означим с $I_{D'}$ и $I_{B'}$ центровете на вписаните в $\triangle AB'C$ и $\triangle AD'C$ окръжности, то $r_{AB'C}+r_{AD'C}=I_{B'}I_{D'}$. От друга страна, ако означим с $I_A$ центъра на вписаната в $\triangle B'CD'$ окръжност, то

$$\sphericalangle CI_AD' = 90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle CB'D' = 90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle CAD' = \angle CI_{B'}D$$

и аналогично $\sphericalangle CI_AB' = \sphericalangle CI_{D'}B'$, т.е. четириъгълниците $CI_AI_{B'}D$ и $CI_AI_{D'}B'$ са вписани. Тогава $\sphericalangle I_AI_{B'}I_{D'} = \sphericalangle I_ACD' = 45^\circ$ и $\sphericalangle I_AI_{D'}I_{B'} = \sphericalangle I_ACB' = 45^\circ$, т.е.

$I'_B I'_D = 2r_{B'D'C}$. Прилагайки отново лемата достигаме до извода, че стойността на израза $r_{ABC} + r_{ADC}$ е най-голяма точно тогава, когато $ABCD$ е квадрат. Аналогично и стойността на израза $r_{BAD} + r_{BCD}$ е най-голяма точно тогава, когато $ABCD$ е квадрат. Остава да пресметнем, че този случай $r_{ABC} + r_{ADC} = r_{BAD} + r_{BCD} = \sqrt{2} - 1$ и така окончателно търсената максимална стойност е $2\sqrt{2} - 2$.

*Забележка. Втората част на задачата (разглеждането на делтоида $AB'CD'$) може да се реши метрично като се въведе $\sphericalangle AB'D' = \alpha$ и се пресметне, че $r_{AB'C} + r_{AD'C} = \sin\alpha + \cos\alpha - 1 \leqq \sqrt{2} - 1$. Също така може да се използва и известната Японска теорема за четириъгълника, която твърди, че ако $ABCD$ е вписан в окръжност четириъгълник, то $r_{ABC} + r_{ADC} = r_{BAD} + r_{BCD}$.*

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за търсене на максимума на $r_{ABC} + r_{ADC}$ и свеждане на задачата до делтоид; 3 т. за сеждане на задачата до квадрат; 1 т. за пресмятане на търсената максимална стойност.

**Задача 10.4.** Да се реши в цели числа уравнението $x^3 - 5x + 28 = 2^y(2^y + 1)$.

**Решение.** Ако $x \leq -4$, то лявата страна на уравнението е отрицателна, а дясната е винаги положителна. Случаите $x = -3, -2, -1$ и $0$ се отхвърлят с директна проверка. Лесно се вижда, че $y = 0$ не води до решение, а при отрицателно $y$ дясната страна не е цяло число за разлика от лявата. Тогава $x$ и $y$ са естествени числа и нататък решението следва решението на задача 9.4.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за случая $x, y \leqq 0$; 2 т. за $3|y$; 1 т. за преобразованието; по 1 т. за случаите $x < 4^k$, $x > 4^k$ и $x = 4^k$.