Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания
9-12 клас

Плевен, 31 март – 2 април 2014 г.

Задача 11.1. Дадено е уравнението $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \dfrac{x}{2} = 3m$, където m е реален параметър.

а) Да се реши уравнението при $m = 0$;

б) Да се намерят всички цели стойности на параметъра m, при които уравнението има решение.

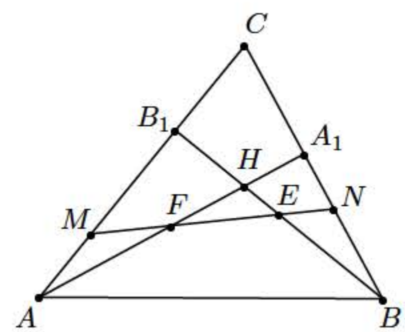
Решение. а) Тъй като $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$, даденото уравнение е еквивалентно на $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$. Корените на квадратното уравнение $4y^2 - 4y - 3 = 0$ са $y_1 = \dfrac{3}{2} > 1$ и $y_2 = -\dfrac{1}{2}$. Следователно $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, т.е. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

б) Както в подточка а) получаваме уравнението $4\cos^2 x - 4\cos x - 3(m+1) = 0$. Търсим за кои цели стойности на m уравнението $f(t) = 4t^2 - 4t - 3(m+1) = 0$ има корен в интервала $[-1, 1]$. Тъй като графиката на $f(t)$ е симетрична спрямо оста на симетрия $t = \dfrac{1}{2}$, то $f(y) = 0$ има решение в $[-1, 1]$ тогава и само тогава, когато $D \geq 0$

и $f(-1) \geq 0$. Сега от $D = 16(4+3m)$ и $f(-1) = 5 - 3m$ получаваме $m \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$.
Целите числа в този интервал са $m = -1, 0, 1$.

Оценяване. (6 точки) а) 1 т. за получаване на квадратно уравнение за $\cos x$; 1 т. за решаване на квадратното уравнение б) 1 т. за получаване на квадратно уравнение за $\cos x$; 3 т. за намиране на $m = -1, 0, 1$.

Задача 11.2. Даден е триъгълник ABC. През средите F и E на височините AA_1 и BB_1 е построена права, която пресича правите AC и BC съответно в M и N. Да се докаже, че правата през върха C и центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност разполовява отсечката MN.



Решение. Достатъчно е да докажем, че $S_{MOC} = S_{NOC}$. Имаме

$$S_{MOC} : S_{NOC} = \frac{\frac{CM}{AC} S_{AOC}}{\frac{CN}{BC} S_{BOC}} = \frac{\frac{CM}{AC} \cdot \frac{AC.BH}{4}}{\frac{CN}{BC} \cdot \frac{BC.AH}{4}} = \frac{CM}{CN} \cdot \frac{BH}{AH}.$$

От друга страна, по теоремата на Менелай за $\triangle CAA_1$ и $\triangle CBB_1$ получаваме съответно

$$\frac{AM}{CM} \cdot \frac{CN}{NA_1} \cdot \frac{A_1F}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{CN}{CM} = \frac{A_1N}{AM} \text{ и } \frac{B_1M}{CM} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BE}{EB_1} = 1 \Rightarrow \frac{CN}{CM} = \frac{BN}{B_1M}.$$

Следователно

$$\frac{CN}{CM} = \frac{A_1N + BN}{B_1M + AM} = \frac{A_1B}{AB_1} = \frac{BH}{AH},$$

откъдето следва, че $S_{MOC} = S_{NOC}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за свеждане до равенството $S_{MOC} = S_{NOC}$; по 2 т. за всяко от двете изразявания на $\frac{CN}{CM}$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 11.3. Дадено е множество A от 2014 естествени числа в интервала $[1, 6]$ и естествено число $t \leq 2014$. За един ход можем да изберем произволни t числа от A и да увеличим с 1 всяко от тях, което е по-малко от 6, а всяко число, което е равно на 6 да заменим с 1. Да се намерят всички стойности на t за които при всяко множество A след някакъв брой ходове можем да получим само шестици.

Решение. Ще докажем, че търсените числа са онези t за които $(6, t) = 1$. Нека $(6, t) = d \neq 1$ и да изберем t числа x от които са равни на 6. След извършване на разрешената операция сборът на числата се променя с $(t-x)-5x=t-6x$ и следователно се дели на d. Сега е ясно, че ако едно от числата е 5, а всички останали са 6, то не можем да получим само шестици.

Нека $(6,t)=1$ и да изберем естествено число k, за което $kt \equiv 1 \pmod 6$. Ще покажем как можем да увеличим дадено число $a \neq 6$ с единица, като всички останали числа остават непроменени. Нека B е подмножество на A с $t+1$ числа (тъй като $t \neq 2014$ такова множество съществува) и $a \in B$. Да извършим k пъти разрешената операция върху всяко от t елементните подмножества на B. Всяко число от B се променя точно kt пъти. Тъй като $kt \equiv 1 \pmod 6$, то горното е еквивалентно на еднократно прилагане на разрешената операция върху всички числа от B.

Като приложим 5 пъти операцията върху t елементното множество $B \backslash \{a\}$ ще получим, че само a е увеличено с 1.

Следователно всички числа могат да бъдат направени равни на 6.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за деклариране на верен отговор; 2 т. за решаване на случая $(t,6) \neq 1$; 4 т. за решаване на случая $(t,6)=1$.

Задача 11.4. Дадено е естествено число k. Да се намерят всички функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такива, че за всеки две естествени числа m и n е изпълнено равенството

$$f(m+f_k(n)) = n + f(m+2014),$$

където $f_k(n) = \underbrace{f(f(\dots(f}_{k \text{ пъти}}(n)\dots)$. (с $\mathbf{N}$ означаваме множеството на естествените числа.)

Решение. Да допуснем, че съществува n, за което $f_k(n) < 2014$ и нека $f_k(n) = c$. Тогава

$$f(m+c) = n + f(m+c+2014-c),$$

т.е. при $x = m+c \geq c+1$ имаме $f(x) = n + f(x+r)$ за $r = 2014-c > 0$. При фиксирано x това означава, че

$$f(x) = n + f(x+r) = 2n + f(x+2r) = \dots = sn + f(x+sn),$$

което е невъзможно, защото дясната част расте неограничено. Следователно $f_k(n) > 2014$ (при $f_k(n) = 2014$ получаваме $n=0$, което е невъзможно). При $n=1$ получаваме

$$f(m+f_k(1)-2014+2014) = 1 + f(m+2014)$$

и като положим $r = f_k(1) - 2014$ и $x = m+2014$, намираме $f(x+r) = 1 + f(x)$ за всяко $x > 2014$. От това равенство с индукция лесно следва, че $m \geq 2015$ е изпълнено равенството $f(x+tr) = t + f(x)$. При $t=n$ и $x=2015$ намираме $f(2015+nr) =$

$n+f(2015)$, а от уравнението от условието при $m=1$ имаме $n+f(2015)=f(1+f_k(n))$. Получихме равенството $f(2015+nr)=f(1+f_k(n))$ и ако допуснем, че $f(n_1)=f(n_2)$ за $n_1 \neq n_2$, от условието ще имаме

$$n_1+f(m+2014)=f(m+f_k(n_1))=f(m+f_k(n_2))=n_2+f(m+2014),$$

т.е. $n_1=n_2$, което е противоречие. Следователно

$$f_k(n)=2014+nr \tag{1}$$

за всяко n. От (1) и от условието имаме

$$f(m+nr+2014)=n+f(m+2014). \tag{2}$$

Освен това $f_{k+1}(n)=f(f_k(n))=f(2014+nr)$, а от друга страна $f_{k+1}(n)=f_k(f(n))=2014+f(n)r$, откъдето

$$f(2014+nr)=2014+f(n)r \tag{3.}$$

От (3) при замяна на n с $n+1$ и от (2) при $m=r$ намираме

$$f(nr+r+2014)=rf(n+1)+2014=n+f(r+2014), \tag{4}$$

откъдето следва, че r дели $n+f(r+2014)-2014$ за всяко n. Това е възможно само при $r=1$ и заместване в (4) дава $f(n+1)=n+f(2015)-2014=n+1+f(2015)-2015=n+1+c$, т.е. $f(n)=n+c$ при $n \geq 2$ и $c=f(2015)-2015$. При $n=1$ в (3) имаме $f(1)=f(2015)-2014=1+f(2015)-2015=1+c$. Следователно $f(n)=n+c$ за всяко n. Оттук и от (1) имаме $f_k(n)=n+kc=n+2014$, т.е. $c=\dfrac{2014}{k}$. Директно се проверява, че когато k дели 2014 функцията $f(n)=n+c$ удовлетворява уравнението от условието. Когато k не дели 2014 такава функция не съществува.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за деклариран верен отговор; най-много 2 т. за съществени наблюдения, които не водят до решение.