Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания 9-12 клас

Плевен, 31 март – 2 април 2014 г.

Задача 12.1. Синусите на три различни ъгъла от интервала $[0, 2\pi]$ образуват аритметична прогресия. Да се докаже, че техните косинуси не могат да образуват аритметична прогресия в същия ред.

Решение. Да допуснем противното, т.е. има три различни числа $x, y, z \in [0, 2\pi]$, за които $\sin x + \sin y = 2 \sin z$ и $\cos x + \cos y = 2 \cos z$. Като повдигнем тези равенства на квадрат и ги съберем почленно, получаваме, че $\cos(x-y) = \sin x \sin y + \cos x \cos y = 1$. Можем да считаме, че $x > y$. Понеже $x - y \in (0, 2\pi]$, то $x = 2\pi, y = 0$. Тогава $z = x$ или $z = y$, което е противоречие.

Оценяване. (6 точки) 4 т. за преобразование, което води до елементарно тригонометрично уравнение, 2 т. за довършване (получаване на противоречие).

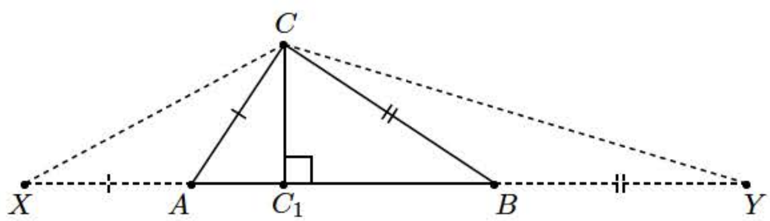
Задача 12.2. Нека CC_1 е височина в $\triangle ABC$, където C_1 е точка от правата AB. Известно е, че сумата от квадратите на периметрите на $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ е равна на квадрата на периметъра на $\triangle ABC$. Да се докаже, че $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Решение. Понеже $P_{\triangle ACC_1} < P_{\triangle ABC}$ и $P_{\triangle BCC_1} < P_{\triangle ABC}$, то точката C_1 лежи на отсечката AB. Нека X и Y са такива точки върху правата AB, че A е между X и B, B е между A и Y, $AX = AC$ и $BY = BC$. Тогава условието приема вида

$$(XC_1 + CC_1)^2 + (YC_1 + CC_1)^2 = XY^2 \quad (*)$$

Като приложим двукратно питагоровата теорема и фомулата за лице, получаваме, че

$$XC^2 + 4S_{\triangle XCC_1} + YC^2 + 4S_{\triangle YCC_1} = XY^2,$$



От косинусова теорема за $\triangle XYC$ и равенството

$$S_{\triangle XCC_1} + S_{\triangle YCC_1} = S_{\triangle XCY} = \frac{1}{2} XC.YC.\sin \sphericalangle XCY$$

следва, че $\cos \sphericalangle XCY + \sin \sphericalangle XCY = 0$. Тогава

$$135^\circ = \sphericalangle XCY = \sphericalangle XCA + \sphericalangle C + \sphericalangle YCB = \frac{\sphericalangle A}{2} + \sphericalangle C + \frac{\sphericalangle B}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle C}{2},$$

откъдето $\sphericalangle C = 90^\circ$.

Забележка. Друго решение се получава, като (*) се преобразува във вида

$$(XC_1 + YC_1 + CC_1)CC_1 = XC_1.YC_1.$$

От $\dfrac{CC_1}{XC_1} = \tan \dfrac{\sphericalangle A}{2}$ *и* $\dfrac{CC_1}{YC_1} = \tan \dfrac{\sphericalangle B}{2}$ *следва, че* $1 = \dfrac{\tan \frac{\sphericalangle A}{2} + \tan \frac{\sphericalangle B}{2}}{1 - \tan \frac{\sphericalangle A}{2} \tan \frac{\sphericalangle B}{2}} = \cot \dfrac{\sphericalangle C}{2},$

откъдето $\sphericalangle C = 90^\circ$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за получаване на (*), 1 т. за следващото преобразуване (от кое да е от двете решение), 2 т. за получаване на тригонометрично уравнение, 2 т. за довършване

Задача 12.3. Да се докаже, че ако a, b, c, d са положителни числа със сума 1, то

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}+\frac{b^3}{4b^2+(c+d)^2}+\frac{c^3}{4c^2+(d+a)^2}+\frac{d^3}{4d^2+(a+b)^2}\geq\frac{1}{8}.$$

Решение. Да забележим, че след привеждане под общ знаменател неравенството

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}\geq\frac{a}{4}-\frac{b+c}{16}$$

е еквивалентно на очевидното $(b+c)(2a-b-c)^2 \geq 0$. Остава да съберем почленно това неравенство с другите три подобни.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за опит за линеаризация, 4 т. за доказване на съответно неравенство, което води до решение, 2 т. за довършване.

Задача 12.4. Дадено е естествено число k. Да се намерят всички функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такива, че за всеки две естествени числа m и n е изпълнено равенството

$$f(m+f_k(n)) = n + f(m+2014),$$

където $f_k(n) = \underbrace{f(f(\dots(f}_{k \text{ пъти}}(n)\dots)$. (с $\mathbf{N}$ означаваме множеството на естествените числа.)

Решение. Да допуснем, че съществува n, за което $f_k(n) < 2014$ и нека $f_k(n) = c$. Тогава

$$f(m+c) = n + f(m+c+2014-c),$$

т.е. при $x = m+c \geq c+1$ имаме $f(x) = n+f(x+r)$ за $r = 2014-c > 0$. При фиксирано x това означава, че

$$f(x) = n + f(x+r) = 2n + f(x+2r) = \cdots = sn + f(x+sn),$$

което е невъзможно, защото дясната част расте неограничено. Следователно $f_k(n) > 2014$ (при $f_k(n) = 2014$ получаваме $n = 0$, което е невъзможно). При $n = 1$ получаваме

$$f(m+f_k(1)-2014+2014) = 1 + f(m+2014)$$

и като положим $r = f_k(1) - 2014$ и $x = m + 2014$, намираме $f(x+r) = 1 + f(x)$ за всяко $x > 2014$. От това равенство с индукция лесно следва, че $m \geq 2015$ е изпълнено равенството $f(x+tr) = t + f(x)$. При $t = n$ и $x = 2015$ намираме $f(2015+nr) =$

$n+f(2015)$, а от уравнението от условието при $m=1$ имаме $n+f(2015)=f(1+f_k(n))$. Получихме равенството $f(2015+nr)=f(1+f_k(n))$ и ако допуснем, че $f(n_1)=f(n_2)$ за $n_1\neq n_2$, от условието ще имаме

$$n_1+f(m+2014)=f(m+f_k(n_1))=f(m+f_k(n_2))=n_2+f(m+2014),$$

т.е. $n_1=n_2$, което е противоречие. Следователно

$$f_k(n)=2014+nr \tag{1}$$

за всяко n. От (1) и от условието имаме

$$f(m+nr+2014)=n+f(m+2014). \tag{2}$$

Освен това $f_{k+1}(n)=f(f_k(n))=f(2014+nr)$, а от друга страна $f_{k+1}(n)=f_k(f(n))=2014+f(n)r$, откъдето

(3). $$f(2014+nr)=2014+f(n)r$$

От (3) при замяна на n с $n+1$ и от (2) при $m=r$ намираме

$$f(nr+r+2014)=rf(n+1)+2014=n+f(r+2014), \tag{4}$$

откъдето следва, че r дели $n+f(r+2014)-2014$ за всяко n. Това е възможно само при $r=1$ и заместване в (4) дава $f(n+1)=n+f(2015)-2014=n+1+f(2015)-2015=n+1+c$, т.е. $f(n)=n+c$ при $n\geq 2$ и $c=f(2015)-2015$. При $n=1$ в (3) имаме $f(1)=f(2015)-2014=1+f(2015)-2015=1+c$. Следователно $f(n)=n+c$ за всяко n. Оттук и от (1) имаме $f_k(n)=n+kc=n+2014$, т.е. $c=\dfrac{2014}{k}$. Директно се проверява, че когато k дели 2014 функцията $f(n)=n+c$ удовлетворява уравнението от условието. Когато k не дели 2014 такава функция не съществува.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за деклариран верен отговор; най-много 2 т. за съществени наблюдения, които не водят до решение.

<u>Задачите са предложени от:</u>

Александър Иванов – 11.4 (12.4);
Николай Николов – 12.1, 12.2, 12.3.