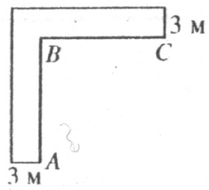
Решения и примерно точкуване

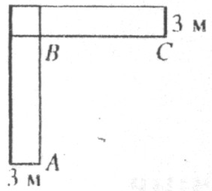
Задача 4.1. Ани и Петя отишли в сладкарницата. Ани купила една поничка с шоколад и две с ванилов крем. Петя купила две понички с шоколад и четири с ванилов крем, а така също и едно парче торта. Ани заплатила 4 лева, а Петя – 10 лева. Колко струва една поничка с шоколад, ако поничка с ванилов крем е с 50 стотинки по-евтина от парче торта?

Решение: Петя е купила два пъти повече понички с шоколад и два пъти повече понички с ванилов крем в сравнение с Ани (**1 т.**). Тъй като Ани е заплатила 4 лева, то поничките на Петя струват 8 лева (**1 т.**). Тогава парчето торта ще струва $10-8=2$ лева (**1 т.**), а поничката с ванилов крем с 50 стотинки по-малко, т.е. 1 лв. 50 ст. (**1 т.**) Две понички с ванилов крем ще струват 3 лева (**1 т.**) и следователно цената на една поничка с шоколад е $4-3=1$ лев. (**1 т.**)

Задача 4.2. Алея с формата на буквата "Г" има ширина 3 м, като дължините AB и BC са равни. Да се намери обиколката на алеята, ако лицето ѝ е 153 кв. м.



Решение: Фигурата, която се получава в ъгъла на алеята, е квадрат със страна 3 м и лице 9 кв. м (**2 т.**). Тогава останалата част от алеята има лице $153-9=144$ кв. м (**1 т.**) и можем да считаме, че е правоъгълник с ширина 3 м и лице 144 кв. м. Дължината на този правоъгълник е $144:3=48$ м и е равна на сбора $AB+BC$ (**1 т.**). Тогава обиколката на алеята е: $2.3+2.3+2.48=108$ м (**2 т.**).



Задача 4.3. Числата от 1 до 16 са разположени в таблица по следния начин:

1	9	16	7	12	5	4	11
8	15	10	2	13	6	3	14

Разрежете таблицата на четири еднакви части така, че сборът от числата във всяка една от тях да е един и същ.

Решение: Сборът на числата от 1 до 16 е равен на 136 (**1 т.**). Тъй като сборът на числата във всяка от четирите части е един и същ, то този сбор е $136:4=34$. (**1 т.**) Едно възможно разрязване на таблицата е показано по-долу (**5 т.**):

							11
	15	10	2	13	6	3	14

Задача 4.4. В един клас има 30 ученици. За украса на училището по случай 22 март те направили от хартия 958 лястовички. Всеки направил нечетно число лястовички, повече от една. Вярно ли е, че всеки двама от учениците са направили различно число лястовички?

Решение. Да допуснем, че всеки двама от учениците са направили различно число лястовички и да намерим колко може да е най-малкият общ брой направени лястовички. (**1 т.**) Нека първият ученик е направил 3 лястовички (**1 т.**). Тогава последният (тридесети) ученик ще е направил $30.2+1=61$ лястовички (**1 т.**) и общо всички ученици са направили най-малко $3+5+7+...+61=960$ лястовичики (**2 т.**). Но $958<960$ (**1 т.**) и следователно не е възможно всеки двама да са направили различен брой, т.е. има поне двама ученици, които са направили равен брой лястовички. (**1 т.**)

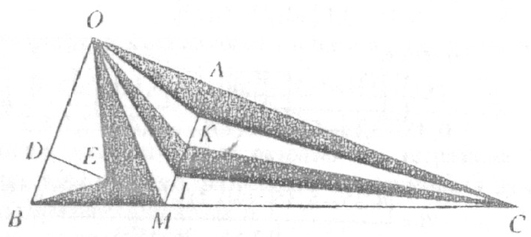
Задача 5.1. В 7 часа сутринта Стоян тръгнал за училище с велосипед, като се движил със скорост 12 км/ч. След училище в 13 часа той тръгнал обратно със скорост 10 км/ч. Като се прибрал, установил, че на отиване е пътувал 5 минути по-малко, отколкото на връщане. Намерете разстоянието от дома на Стоян до училището и в колко часа се е прибрал.

Решение: Нека t е времето за връщане в часове. Тъй като 5 минути са $\frac{1}{12}$ от часа (**1 т.**), то $10t=12\left(t-\frac{1}{12}\right)$ (**2 т.**). Оттук $t=\frac{1}{2}=0,5$ ч. (**1 т.**). Сега за разстоянието намираме $10.0,5=5$ км (**1 т.**). Освен това $13+0,5=13,5$ и следователно Стоян се е прибрал в 13:30 часа. (**1 т.**)

Задача 5.2. Градинката на баба Милка има триъгълна форма BCO, както е показано на чертежа. Отсечките MA и MD са перпендикулярни съответно на страните OC и OB. Точка E е средата на отсечката MD, а точките I, L и K делят отсечката MA на равни части.

а) Ако $MI=2,5$ м, $MD=10$ м и $OC+OB=51,4$ м, намерете колко квадратни метра е лицето на градинката на баба Милка.

б) В затъмнените участъци $OMBE$, $ICLO$ и KCO баба Милка отглежда плодове, а в другите части на градинката тя отглежда зеленчуци. Намерете кое е повече – частта, заета от зеленчуци или частта, заета от плодове.



Решение: а) От условието $MI=2,5$ м намираме, че $MA=10$ м (**1 т.**). $S_{OBC}=S_{OMC}+S_{OMB}=\frac{OC.MA}{2}+\frac{OB.MD}{2}=5.(OC+OB)=5.51,4=257$ кв.м (**2 т.**).

б) Триъгълниците DEO и MEO имат равни основи и обща височина от върха O. Следователно те имат равни лица. Аналогично триъгълниците BED и BME имат равни основи и обща височина от върха B. Така получаваме, че $S_{OMBE}=S_{OBE}$ (**1 т.**). Триъгълниците MIO, ILO, LKO и KAO имат равни основи и обща височина от върха O. Следователно лицата им са равни. Аналогично и лицата на триъгълници MIC, ILC, LKC и KAC са равни. Следователно $S_{MCIO}=S_{ICLO}=S_{LCKO}=S_{KCO}$ (**2 т.**), което показва, че частта, заета от зеленчуци, е равна на часта, заета от плодове.

Задача 5.3. Алекс разделила числото 2012 на едно двуцифрено число и получила частно k и остатък 32. Ива разделила друго четирицифрено число на същото двуцифрено число и получила частно 32 и остатък k. Намерете кое число е делила Ива, ако то има равни цифри на единиците и хилядите, а цифрата на стотиците му е по-малка от тях.

Решение: Нека N е двуцифреното число, на което дели Алекс. Тогава $2012=N.k+32$ (**1 т.**) и следователно N е делител на $2012-32=1980=2.2.3.3.5.11$ (**1 т.**). Но N трябва да е по-голямо от 32 и заключаваме, че N може да е 33, 36, 44, 45, 55, 60, 66, 90 или 99 (**2 т.**). За да намерим числото на Ива, трябва да проверим за кои от възможните стойности на N числото $32.N+k$ е с исканото свойство (**1 т.**). От равенствата $32.66+30=2142$ и $32.90+22=2902$ получаваме, че за числото на Ива има

две възможности (**1 т.**). Цифрата на стотиците на 2142 е по-малка от цифрата на единиците и хилядите, откъдето заключаваме, че Ива е делила 2142 (**1 т.**).

Задача 5.4. В един клас учат 9 девойки и 17 младежи, които са номерирани с числата от 1 до 26, като най-напред са номерирани девойките, а след това – младежите. Всяка девойка харесва младежите, чиито номера не надминават нейния удвоен номер с повече от 8. На танцова забава всяка девойка избира младеж, когото харесва и танцува с него. По колко различни начина може да се осъществи изборът?

Решение: Да разгледаме девойката с № 1. (**1 т.**) Тъй като $2.1+8=10$, то за тази девойка има единствена възможност да избере младежа с № 10. (**1 т.**) За девойката с № 2 е изпълнено $2.2+8=12$ и понеже младежът с № 10 е вече избран, за тази девойка има възможност да избере № 11 или № 12, т.е. възможностите са 2. (**1 т.**) За девойката с № 3 е изпълнено $2.3+8=14$ и тъй като двама младежи са вече избрани, за тази девойка остават 3 възможности. (**1 т.**) Аналогично за девойката с № 4 има 4 възможности, за девойката с № 5 възможностите са 5 и т.н., за девойката с № 9 възможностите са 9. (**2 т.**) Броят на различните начини за осъществяване на избора е

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9=362\ 880.$$ (**1 т.**)

Задача 6.1. Да се намерят числените стойности на изразите и да се сравнят тези изрази по големина:

$$A=\frac{|5,1:|-1,9+0,2|-5,4|}{-0,45-3,1.|-4,23-0,27|} \quad \text{и} \quad B=\frac{|4,25-5,35|:(-0,2)-|-5,25|:|-0,625|}{|12,55-26,45|.5}.$$

Решение:

$$A=\frac{|5,1:|-1,9+0,2|-5,4|}{-0,45-3,1.|-4,23-0,27|}=\frac{|5,1:1,7-5,4|}{-0,45-3,1.4,5}=\frac{|3-5,4|}{-0,45-13,95}=\frac{2,4}{-14,4}=-\frac{1}{6}.$$ (**2 т.**)

$$B=\frac{|4,25-5,35|:(-0,2)-|-5,25|:|-0,625|}{|12,55-26,45|.5}=\frac{1,1:(-0,2)-5,25:0,625}{13,9.5}=$$

$$=\frac{-5,5-8,4}{13,9.5}=\frac{-13,9}{13,9.5}=-\frac{1}{5}.$$ (**2 т.**)

$-\frac{1}{6}>-\frac{1}{5}$, от което следва, че $A>B$. (**2 т.**)

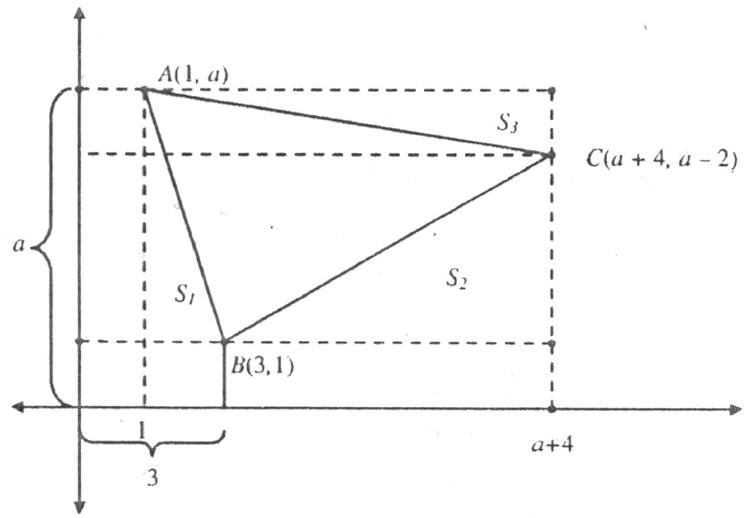
Задача 6.2. За цифрата b е вярно, че $\overline{bbb}:(bb)=37$ (тук $\overline{bbb}$ означава трицифреното число с три цифри b). В правоъгълна координатна система са дадени точките A (1, a), B (b, 1) и C ($a+b+1$, $a-b+1$), като a е цяло число, по-голямо от b.

а) Изразете лицето S_{ABC} на ΔABC чрез a.

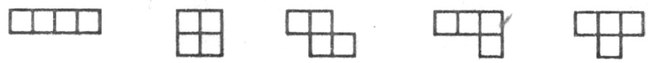
б) Определете най-малката възможна цяла стойност на S_{ABC}.

Решение: От $\overline{bbb}:(bb)=37$ следва $111:b=37$, откъдето $b=3$ (**1 т.**). Ще намерим S_{ABC}, като от лицето S на правоъгълника, ограждащ търсения триъгълник, извадим лицата на три триъгълника S_1, S_2 и S_3.

Намираме, че $S=(a+3)(a-1)$ (**0,5 т.**), $S_1=a-1$ (**0,5 т.**), $S_2=\frac{(a+1)(a-3)}{2}$ (**1 т.**) и $S_3=a+3$ (**1 т.**). Изразявайки, достигаме до $S_{ABC}=\frac{a(a+2)-7}{2}$ (**1 т.**). Стойността на израза е по-малка при по-малки a и е цяла, ако a е нечетно число. Предвид $a>b$, избираме $a=5$ и тогава $S=14$ (**1 т.**).



Задача 6.3. Тетрамино се нарича фигурка, съставена от 4 единични квадратчета:



Правоъгълник, разчертан на n единични квадратчета, е разрязан на тетрамина от показаните пет вида (от всеки вид има поне по едно; разрешено е тетрамината да се въртят). Да се определи най-малката възможна стойност на n.

Решение: **Отговор:** n = 24. Всяко тетрамино се състои от четири квадратчета, така че n е кратно на 4 и е поне 20. Ако допуснем, че n = 20, то от всеки вид има по едно тетрамино. Да оцветим големия правоъгълник шахматно; понеже поне един от размерите е четен, имаме равен брой бели и черни полета. Всяко от дадените тетрамина, без последното, ще има по 2 бели и 2 черни полета. Последното ще има 3 полета от един цвят, което нарушава равенството на белите и черните полета. Следователно трябва да има поне две фигурки от последния вид (**4 т.**). Ето как може да има точно две тетрамина от последния вид и по едно от останалите (във всяко квадратче е написан номерът на тетраминото, към което е квадратчето) (**3 т.**). И така, най-малкото възможно n е 24.

6	1	1	1	1	2	2	4
6	6	5	3	3	2	2	4
6	5	5	5	3	3	4	4

Задача 6.4. В едно училище над $\frac{4}{11}$ от учениците завършили първия срок с "отличен", над $\frac{1}{3}$ от учениците – с "много добър" и над $\frac{3}{10}$ от учениците – с "добър". Колко най-малко ученици може да има в това училище?

Решение: Нека учениците са n, като a са завършили с "отличен", b – с "много добър" и c – с успех "добър". Тогава $\frac{a}{n}>\frac{4}{11}$, така че $11a>4n$, т.е. $11a\geq 4n+1$ и $a\geq\frac{4n+1}{11}$ (**1 т.**). Аналогично $b\geq\frac{n+1}{3}$ и $c\geq\frac{3n+1}{10}$ (**2 т.**). Тогава $n\geq a+b+c\geq\frac{4n+1}{11}+\frac{n+1}{3}+\frac{3n+1}{10}$ (**1 т.**). Като умножим по 330, получаваме

$330n \geq 120n+30+110n+110+99n+33$, откъдето $n \geq 173$ **(1 т.)**. Равенство може да се достигне при $n=173$, $a=\frac{4n+1}{11}=63$, $b=\frac{n+1}{3}=58$ и $c=\frac{3n+1}{10}=52$ **(2 т.)**.

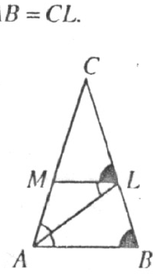
Задача 7.1. Да се намерят всички стойности на параметъра k, при които корените на уравнението $|3x+5|=|3-x|$ са корени и на уравнението $(kx-1)(x+|x|+k)=0$.

Решение: $|3x+5|=|3-x| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5=3-x \\ 3x+5=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=-2 \\ 2x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=-4 \end{cases}$ **(2 т.)**. При $x_1=-\frac{1}{2}$ за второто уравнение имаме $\left(k\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)\left(-\frac{1}{2}+\left|-\frac{1}{2}\right|+k\right)=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{k}{2}-1\right)k=0$, откъдето $k_1=-2$ и $k_2=0$ **(1 т.)**. При $x_1=-4$ за второто уравнение имаме $(k(-4)-1)(-4+|-4|+k)=0 \Leftrightarrow (-4k-1)k=0$, откъдето $k_3=-\frac{1}{4}$ и $k_4=0$ **(1 т.)**.

Така при $k=-2$ корен на второто уравнение е само $x_1=-4$, а при $k=-\frac{1}{4}$ корен е само $x_2=-4$ **(1 т.)**. Следователно само при $k=0$ и двата корена на $|3x+5|=|3-x|$ са корени и на $(kx-1)(x+|x|+k)=0$ **(1 т.)**.

Задача 7.2. В равнобедрения триъгълник ABC $(AC=BC)$ отсечката AL $(L \in BC)$ е ъглополовяща. Да се намерят ъглите на триъгълника, ако $AB=CL$.

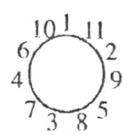
Решение: Нека $LM \parallel AB$ $(M \in AC)$ **(1 т.)**. Тогава $\sphericalangle ABC=\sphericalangle MLC$. Тъй като ΔABC е равнобедрен, то $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC$. Следователно $\sphericalangle LMC=\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABC=\sphericalangle MLC$ и $CL=CM$. Така получаваме $BL=AM$ **(1 т.)**. Но AL е ъглополовяща и $\sphericalangle BAL=\sphericalangle MAL$. От $LM \parallel AB$ имаме $\sphericalangle BAL=\sphericalangle ALM$. Следователно $\sphericalangle MAL=\sphericalangle ALM$, т.е. $AM=ML$, откъдето $BL=ML$ **(1 т.)**. От последното равенство, от $AB=CL$ и $\sphericalangle ABC=\sphericalangle MLC$ получаваме, че $\Delta ABL \cong \Delta CLM$ (I пр.) **(1 т.)**. Следователно $\sphericalangle CML=\sphericalangle ALB$, откъдето $\sphericalangle ALB=\sphericalangle CML=\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC$. Ако $\sphericalangle ABC=\alpha$, от ΔABL намираме $2\alpha+\frac{\alpha}{2}=180°$, откъдето $\alpha=72°$ **(1 т.)**. Окончателно $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC=72°$ и $\sphericalangle ACB=36°$. **(1 т.)**



Задача 7.3. а) Може ли числата от 1 до 11 да се наредят по окръжност така, че всяко число да се дели на разликата от съседните си?

б) Може ли същото да се направи с числата от 1 до 13?

Решение: а) Може, напр. виж фигурата вдясно. **(3 т.)**



б) Понеже нечетно число не се дели на четно, то съседните на всяко нечетно число трябва да са от различна четност. Това означава, че нечетните числа трябва да са групирани по две. От 1 до 13 има 7 нечетни числа и те не могат да се групират по две. Следователно такова подреждане на числата е невъзможно, защото броят на нечетните числа от 1 до 13 е нечетен. **(4 т.)**

Задача 7.4. Да се намерят всички естествени числа a, b и c, за които $a!b!=a!+b!+c!$.

(За всяко естествено число a имаме $a!=1.2.\ldots(a-1)a$.)

Решение: Ще използваме многократно следните две очевидни твърдения:

- За всеки две естествени числа m и n, $m!|n!$ тогава и само тогава, когато $m \leq n$.
- За всеки три естествени числа k, m и n, за които k е най-малкото, е в сила $\frac{m!}{k!}|\frac{n!}{k!} \Leftrightarrow m \leq n$

Нека $a!b!=a!+b!+c!$. Без ограничение можем да считаме, че $a \leq b$. Тогава $a!|b!$ и следователно $a!|c!$, т.е. $a \leq c$ **(1 т.)**. Сега равенството $a!b!=a!+b!+c!$ е еквивалентно на $b!=1+\frac{b!}{a!}+\frac{c!}{a!}$. В частност $b! \geq 3$, откъдето $b \geq 3$ **(1 т.)**. Ще разгледаме два случая:

1. сл. $c \leq b$. Тогава $c!|b!$ и $\frac{c!}{a!}|\frac{b!}{a!}$, откъдето $\frac{c!}{a!}|1$, т.е. $c!=a!$. Следователно $b!=2+\frac{b!}{a!}$, откъдето $\frac{b!}{a!}|2$, т.е. $\frac{b!}{a!}=1$ или $\frac{b!}{a!}=2$. Имаме $b!=3$ или $b!=4$, което не е изпълнено за нито едно естествено b и следователно случаят $c \leq b$ е невъзможен. **(2 т.)**

2. сл. $b<c$. Аналогично на предния случай получаваме $a!=b!$ и $b!=2+\frac{c!}{b!}$. Тъй като $b \geq 3$, $3|b!$. От друга страна 3 не дели 2 и следователно 3 не дели $\frac{c!}{b!}$. Оттук $c \leq b+2$, защото в противен случай $\frac{c!}{b!}=(b+1)(b+2)(b+3)\ldots c$, а $3|(b+1)(b+2)(b+3)$ **(1 т.)**. Следователно $c=b+1$ или $c=b+2$. При $c=b+1$ имаме $b!=3+b$ и в частност $b|3$, откъдето $b=3$. При $c=b+2$ имаме $\frac{c!}{b!}=(b+1)(b+2)=b^2+3b+2$ и $b!=2+\frac{c!}{b!}=b^2+3b+4$. Така $b|4$ и понеже $b \geq 3$, то $b=4$, което е невъзможно, защото $4!=24 \neq 4+12+16$. **(1 т.)**

Получаваме, че единствената възможност е $a=b=3$ и $c=4$, което е и търсеният отговор, тъй като $3!3!=36=3!+3!+4!$. **(1 т.)**

Задача 8.1. а) Да се намерят всички цели числа x, за които е изпълнено равенството $|x^2-1|+|x^2-4|=3x$.

б) Да се намерят всички цели числа x и a, за които е изпълнено равенството $|x^2-1|+|x^2-4|=ax$.

Решение: а) От условието следва, че $x>0$ и даденото равенство е еквивалентно на $(x+1)|x-1|+(x+2)|x-2|=3x$.

1 сл. $x \in (0;1]$. В този интервал има само едно цяло число $x=1$. Заместваме и получаваме, че $x=1$ е решение.

2 сл. $x \in (1;2]$. В този интервал има само едно цяло число $x=2$. Заместваме и получаваме, че $3=6$ и следователно $x=2$ не е решение.

3 сл. $x \in (2;+\infty)$. В този случай получаваме $2x^2-3x-5=0$. Това уравнение има за корени $x_1=\frac{5}{2}$ и $x_2=-1$, които не са в интервала $(2;+\infty)$. Следователно единственото решение е $x=1$ **(2 т.)**.

б) От условието следва, че x и a имат еднакви знаци и $a \neq 0$. Достатъчно е да разгледаме само случая $a>0$ (и следователно $x>0$), тъй като случаят $a<0$ е симетричен. Тогава даденото равенство е еквивалентно на

$$(x+1)|x-1|+(x+2)|x-2|=ax.$$

1 сл. $x \in (0;1]$. В този интервал има само едно цяло число $x=1$. Заместваме и получаваме, че $a=3$. Следователно $x=1$ и $a=3$ е решение. От симетрията получаваме, че $x=-1$ и $a=-3$ също е решение (1 т.).

2 сл. $x \in (1;2]$. В този интервал има само едно цяло число $x=2$. Заместваме и получаваме, че $a=\frac{3}{2}$, което не е цяло число (1 т.).

3 сл. $x \in (2;+\infty)$. В този случай получаваме $5=2x^2-ax=x(2x-a)$. Тъй като 5 е просто число и $x>2$, единствената възможност е $x=5$ и $2x-a=1$, т.е. $x=5$ и $a=9$. Следователно $x=5$ и $a=9$ е решение. От симетрията получаваме, че и $x=-5$ и $a=-9$ също е решение (2 т.).

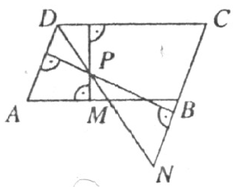
Задача 8.2. а) Докажете, че ΔABC е равнобедрен с основа AB тогава и само тогава, когато за всяка точка P от страната AB сумата от разстоянията до страните AC и BC не зависи от точката P.

б) Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е такъв, че за всяка вътрешна точка P сумата от разстоянията до четирите му страни е постоянна. Докажете, че $ABCD$ е успоредник.

Решение: а) Нека ABC е равнобедрен ($AC=BC$). Да означим с x и y разстоянията от точка $P \in AB$ съответно до страните AC и BC. Тогава

$$x+y=\frac{2S_{APC}}{AC}+\frac{2S_{BPC}}{BC}=\frac{2S_{ABC}}{AC}=const \text{ (1 т.).}$$

Обратно: Нека $P \neq Q$ са произволни точки от отсечката AB. Да означим с x и y разстоянията от точката P съответно до страните AC и BC, а с z и w разстоянията от точката Q съответно до страните AC и BC. Тогава е изпълнено $x+y=z+w$. От друга страна $xAC+yBC=2S_{ABC}=zAC+wBC$. От получените равенства следва, че $(y-w)(BC-AC)=0$ (1 т.). Тъй като AB и BC не са успоредни, то $y \neq w$ и следователно $AC=BC$ (1 т.).



б) Можем да предполагаме, че $AD \leq AB$ (случаят $AB \leq AD$ е аналогичен). Върху страната AB избираме точка M така, че $AM=AD$. Нека N е пресечната точка на правата DM с правата BC и P е точка върху отсечката DM, различна от нейните краища. Тогава от подусловие а) следва, че сумата от разстоянията до страните AD и AM на ΔMDA не зависи от P, т.е. сумата от разстоянията до страните AD и AB на четириъгълника $ABCD$ не зависи от P. Но сега с помощта на условието на задачата заключаваме, че сумата от разстоянията от P до страните BC и CD също не зависи от P. От подусловие а) следва, че ΔDCN е равнобедрен ($CD=CN$). Ако $N \equiv B$, то е ясно, че $\sphericalangle ADC=\sphericalangle CBA$ (1 т.). Нека $N \neq B$. Тогава

$$\sphericalangle CBA=\sphericalangle BND+\sphericalangle BMN=\sphericalangle CDN+\sphericalangle DMA=\sphericalangle CDN+\sphericalangle MDA=\sphericalangle ADC.$$

Аналогично се доказва, че $\sphericalangle DAB=\sphericalangle BCD$ (1 т.). От $\sphericalangle ADC=\sphericalangle CBA$ и $\sphericalangle DAB=\sphericalangle BCD$ следва, че $ABCD$ е успоредник (1 т.).

Задача 8.3. Нека $a \neq 0$, b и c са цели числа, за които е изпълнено $|a| \leq 2011$, $|b| \leq 2011$ и $|c| \leq 2011$. Да се докаже, че ако уравнението $ax^2+bx+c=0$ има реален корен x_0, то $|x_0| < 2012$.

Решение: Да допуснем, че $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $|x_0| \geq 2012$. Тогава $ax_0^2=-bx_0-c$ и следователно $|a||x_0|^2=|bx_0+c| \leq |b||x_0|+|c|$ (1 т.). От условието следва, че $|a| \geq 1$ и следователно $|a||x_0|^2 \geq 2012|x_0|$ (2 т.). Тогава $2012|x_0| \leq |b||x_0|+|c| \leq 2011|x_0|+2011$ (2 т.), откъдето $|x_0| \leq 2011$, което е противоречие с допускането (2 т.).

Задача 8.4. Нека $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) е n-ъгълник, дължините на страните на който са естествени числа. Да се намерят дължините на страните на n-ъгълника, ако е известно, че дължината на всяка страна е една осма от квадрата на сумата на дължините на двете съседни страни.

Решение: Да означим дължините на страните с a_1, a_2,..., a_n. Числата a_1, a_2,..., a_n са естествени и за тях е изпълнено $a_i=\frac{(a_{i-1}+a_{i+1})^2}{8}$ за $i=1,2,...,n$, като приемаме, че $a_0=a_n$ и $a_{n+1}=a_1$. Оттук $a_i \neq 1$ за $i=1,2,...,n$, тъй като в противен случай бихме получили, че 8 е точен квадрат (2 т.). От неравенството $(x+y)^2 \geq 4xy$ получаваме, $8a_i \geq 4a_{i-1}a_{i+1}$ за $i=1,2,...,n$ (1 т.), откъдето $8^n a_1a_2...a_n \geq 4^n(a_1a_2...a_n)^2$ и заключаваме, че $a_1a_2...a_n \leq 2^n$ (1 т.). От друга страна, тъй като за всяко i, $a_i \geq 2$, $a_1a_2...a_n \geq 2^n$ (1 т.), то $a_1a_2...a_n=2^n$ (1 т.). Единствената възможност е $a_1=a_2=...=a_n=2$ (1 т.).

Забележка: Ако е разгледан случай за някое конкретно n, се присъждат не повече от 2 точки.

Автори на задачите са:

4.1. и 4.3. – Ж. Желев, 4.2. – Т. Витанов, 4.4. – И. Шаркова;

5.1. и 5.3. – И. Ангелов, 5.2. – И. Шаркова, 5.4. – Св. Дойчев, В. Ненков и С. Гроздев;

6.1. и 6.2. – И. Старибратов, 6.3. и 6.4. – И. Кортезов;

7.1. – Ч. Лозанов, 7.2. и 7.3. – Т. Витанов, 7.4. – Хр. Ганчев;

8.1., и 8.3. – С. Замковой, 8.2 и 8.4. – Хр. Ганчев.

Кратки решения на задачите

Задача 9.1. Даден е равностранен $\triangle ABC$. Точка D е вътрешна за страната BC. Външно за $\triangle ABC$ са построени равностранните триъгълници BDE и CDF. Правите AE и AF пресичат BC съответно в точки M и N.

а) Да се намери $\dfrac{DM}{MB} + \dfrac{CN}{NB}$.

б) Ако $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{3}$, да се намери $\dfrac{MN}{BC}$.

Решение. а) Тъй като $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDE = 60°$, имаме $DE \| AB$ (и $\triangle ABM \sim \triangle EDM$). Тогава $\dfrac{DM}{MB} = \dfrac{DE}{AB}$. Аналогично получаваме $\dfrac{CN}{NB} = \dfrac{CF}{AB}$. Следователно

$$\frac{DM}{MB} + \frac{CN}{NB} = \frac{DE}{AB} + \frac{CF}{AB} = \frac{BD + CD}{AB} = 1.$$

б) Без ограничение на общността можем да считаме, че $AB = 1$ и $BD = \dfrac{1}{3}$. Да означим $DM = x$ и $CN = y$. Тогава както в а) имаме $\dfrac{x}{1/3 - x} = \dfrac{1}{3}$, откъдето $x = \dfrac{1}{12}$ и аналогично $\dfrac{y}{1-y} = \dfrac{2}{3}$, откъдето $y = \dfrac{2}{5}$. Следователно $MN = x + \dfrac{2}{3} - y = \dfrac{7}{20}$, т.е. $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{7}{20}$.

<u>Оценяване:</u> По 3 т. за а) и б). В а) по 1 т. за двете успоредности (или подобия) и 1 т. за довършване. В б) по 1 т. за намиране на DM и CN и 1 т. за намиране на MN.

Задача 9.2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които системата уравнения

$$\left| \begin{array}{rcl} x^3 & = & ax + y \\ y^3 & = & ay + x \end{array} \right.$$

има единствено реално решение.

Решение. Тъй като $x = 0$, $y = 0$ е решение за всяко a, задачата се свежда до това системата да няма друго решение. След почленно изваждане и събиране на двете уравнения получаваме еквивалентната система

$$\left| \begin{array}{rcl} (x-y)(x^2 + xy + y^2) & = & (a-1)(x-y) \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) & = & (a+1)(x+y) \end{array} \right. \qquad (1)$$

Ако $y = x$, (1) се свежда до $2x^3 = 2(a+1)x$. Оттук $x = 0$ (и $y = 0$) или $x^2 = a + 1$. Последното уравнение няма ненулево реално решение само при $a \le -1$.

Ако $y = -x$, (1) се свежда до $2x^3 = 2(a-1)x$. Оттук $x = 0$ (и $y = 0$) или $x^2 = a - 1$. Това уравнение няма решение, понеже $a - 1 < 0$ при $a \le -1$.

При $y \ne \pm x$, (1) е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{rcl} x^2 + xy + y^2 & = & a - 1 \\ x^2 - xy + y^2 & = & a + 1 \end{array} \right. \qquad (2)$$

Събираме почленно двете уравнения на (2) и получаваме $x^2 + y^2 = a$, което е невъзможно при $a \le -1$. Следователно (2) няма решение.

Окончателно, дадената система има единствено решение ($x = 0$, $y = 0$) точно когато $a \le -1$.

<u>Оценяване:</u> По 2 т. за всеки от случаите $y = x$, $y = -x$ и $y \ne \pm x$. При други решения: 3 т. за необходимост на условието $a \le -1$ и 3 т. за неговата достатъчност.

Задача 9.3. Да се докаже, че съществуват безбройно много съставни естествени числа n, за които числото $n! - 1$ се дели на поне две различни прости числа.

Решение. Нека $p > 5$ е просто число, $n = p - 2$ и да означим $N = n! - 1 = (p-2)! - 1$. По теоремата на Уилсън имаме $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ и, тъй като $(p-1)! = (p-1)(p-2)! \equiv -(p-2)! \pmod p$, следва, че $(p-2)! \equiv 1 \pmod p$. С други думи, N се дели на p. Да допуснем, че N няма друг прост делител, т.е. $N = p^m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогава $N \equiv 1 \pmod{p-1}$, понеже $p \equiv 1 \pmod{p-1}$. От друга страна, $2 < \frac{p-1}{2} < p - 2$ поради $p > 5$, което означава, че 2 и $\frac{p-1}{2}$ са различни множители в $(p-2)!$ и тогава $2 \cdot \frac{p-1}{2} = p - 1$ дели $(p-2)!$. Оттук $N \equiv -1 \pmod{p-1}$, което противоречи на $N \equiv 1 \pmod{p-1}$. Следователно N има и прост делител, различен от p, т.е. N се дели на поне две различни прости числа.

Накрая, да изберем p от вида $3k + 2$, $k > 1$. Както е известно, съществуват безбройно много прости числа от този вид. Тогава $n = 3k$ е съставно число и твърдението е доказано.

<u>Оценяване:</u> 2 т. за избора $n = p - 2$ и за доказване, че тогава $p | n! - 1$, 3 т. за доказване, че $n! - 1$ има поне още един прост делител и 2 т. за заключението, че съществуват безбройно много такива съставни n.

Задача 9.4. Нека $n \ge 3$ е нечетно естествено число. Шахматна дъска $n \times n$ е оцветена по обичайния начин (т.е. долното ляво поле е черно). Разрешено е за един ход да се избере произволен правоъгълник от клетки на дъската и да се променят цветовете на всички клетки от този правоъгълник. Да се намери минималният брой ходове, за които дъската може да стане:

а) бяла; б) черна.

Решение. Да разгледаме произволни две полета с обща страна. Тъй като в началото тези полета са оцветени различно, а накрая – еднакво, то при някой от ходовете тях-

ната обща страна е трябвало да бъде част от границата на съответния правоъгълник за този ход (Защо?).

Полетата, които граничат с ръба на дъската, са $4(n-1)$ на брой, и имат помежду си $4(n-1)$ общи страни. Лесно се вижда, че границата на всеки правоъгълник със страни, успоредни на страните на дъската, може да съдържа най-много четири от тези общи страни (по две в двата крайни реда или по две в двата крайни стълба). Следователно са ни необходими поне $4(n-1)/4 = n-1$ хода.

Дъската може да стане едноцветна при следните $n-1$ хода: преоцветяваме последователно $2, 4, \ldots, (n-1)$-ви ред, после $2, 4, \ldots, (n-1)$-ви стълб. В този момент всички полета са с началния цвят на ъгловите полета. Сега с един ход върху цялата дъска достигаме до другия цвят.

Следователно отговорът е $n-1$ хода за черна дъска (цветът, в който отначало са били ъгловите полета) и n хода за бяла дъска.

<u>Оценяване:</u> 5 т. за оценката (от тях 1 т. за съображението за общата страна), 2 т. за конструкцията.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър $a > 0$, за които уравнението

$$a^{|x+1|} - |a^{x+1} - 1| = 1$$

има точно един корен.

Решение. (*I начин*) Нека $x \geq -1$. Тогава уравнението приема вида $a^{x+1} - 1 = |a^{x+1} - 1|$. При $a > 1$ уравнението има безбройно много решения, а при $0 < a < 1$ – единствено решение $x = -1$.

Нека $x < -1$. Тогава уравнението приема вида

$$\frac{1}{a^{x+1}} - |a^{x+1} - 1| = 1.$$

Полагайки $y = a^{x+1}$ получаваме $y|y-1| + y - 1 = 0$. Можем да приемем, че $0 < a < 1$, откъдето следва, че $y > 1$. Сега уравнението приема вида $y^2 = 1$, противоречие с $y > 1$. Окончателно търсените стойности за a са $0 < a < 1$.

(*II начин*) Ако $0 < a < 1$, то $a^{|x+1|} \leqq a^0 = 1$. От друга страна $a^{|x+1|} = |a^{x+1} - 1| + 1 \geqq 1$ и следователно $a^{|x+1|} = 1$, т.е. уравнението има единствено решение $x = -1$.

Ако $a \geqq 1$, то всяко $x \geqq -1$ е решение, защото

$$a^{|x+1|} - |a^{x+1} - 1| = a^{x+1} - (a^{x+1} - 1) = 1.$$

Така окончателно, търсените стойности за a са $0 < a < 1$.

<u>Оценяване:</u> (*I начин*) За отхвърляне на случая $a > 1$ – 2 т.; за доказване, че при $0 < a < 1$ има единствен корен в интервала $[-1, \infty)$ – 2 т.; за доказване, че при $0 < a < 1$ няма корен в интервала $[-\infty, -1)$ – 2 т. (*II начин*) 4 т. за намиране на единствено решение при $0 < a < 1$; 2 т. за намиране на повече от едно решение при $a \geqq 1$.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB = 90°$, в който външновписаната окръжност към страната AB допира AB в точка N. Ако $\sphericalangle BNC = 45°$, то да се намери $\sphericalangle BAC$.

Решение. (*I начин*) Нека CL е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ ($L \in AB$). Тогава $\sphericalangle BCL = 45° = \sphericalangle BNC$, т.е. $\triangle BNC \sim \triangle BCL$, $\dfrac{BC}{BN} = \dfrac{BL}{BC}$ и следователно $BC^2 = BN.BL$.

Ако използваме стандартните метрични означения за $\triangle ABC$, то $BN = p - a$, $BL = \dfrac{ac}{a+b}$ и получаваме

$$a^2 = (p-a).\frac{ac}{a+b} \Leftrightarrow ab = (b-a)p.$$

От друга страна $ab = 2S_{ABC} = 2pr = 2p(p-c)$ и след заместване в горното равенство достигаме до $b - a = 2(p-c)$, т.е $c = 2a$ и следователно $\sphericalangle BAC = 30°$.

(*II начин*) Нека вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k се допира до страната AB в точка P. Ако означим с Q диаметрално противоположната точка на P в k, то добре известен факт е, че точките C, Q и N са колинеарни. (Класическото доказателство е с хомотетия с център C, която изпраща k във външновписаната окръжност.) От $\sphericalangle BNC = 45°$ следва, че $NP = PQ$, т.е. $b - a = 2r = 2(p-c)$, $c = 2a$ и $\sphericalangle BAC = 30°$.

<u>Оценяване:</u> (*I начин*) 2 т. за $\triangle BNC \sim \triangle BCL$; 1 т. за $a^2 = (p-a).\dfrac{ac}{a+b}$; 1 т. за $ab = (b-a)p$; 1 т. за $c = 2a$; 1 т. за $\sphericalangle BAC = 30°$. (*II начин*) 3 т. за построяване на точките P и Q и отбелязване на факта, че $Q \in CN$; 1 т. за $NP = PQ$, т.е. $b - a = 2r$; 1 т. за $c = 2a$; 1 т. за $\sphericalangle BAC = 30°$.

Задача 10.3. Дадено е нечетното число n. Да се докаже, че числата $0, 1, \ldots, n^2 - 1$ могат да бъдат подредени в таблица с n реда и n стълба така, че всяко частно и всеки остатък, получени при делене на тези числа на n да се среща точно веднъж в ред и стълб.

Решение. Да запишем в клетката в ред i и стълб j числото

$$n \cdot ((i+j) \pmod n) + (i-j) \pmod n.$$

Ясно е, че всяко частно и всеки остатък се срещат точно веднъж в ред и стълб. Да допуснем, че в клетки (i,j) и (k,l), $(i,j) \neq (k,l)$, има записано едно и също число.

Тогава

$$\begin{aligned} i+j &\equiv k+l \pmod{n}, \\ i-j &\equiv k-l \pmod{n}. \end{aligned}$$

откъдето $i=k$, $j=l$, противоречие.

Оценяване: За намиране на работеща конструкция – 4 т. За доказване, че тя наистина работи – 3 т.

Задача 10.4. Да се намери най-малкото естествено число M, за което числото 2012 може да се представи като сума от кубовете на M цели числа.

Решение. Нека 2012 е представено като сума от кубовете на M цели числа. Лесно се проверява, че за произволно цяло число x,

$$x^3 \equiv 0, 1, \text{ или } -1 \pmod{9}$$

и тъй като $2012 \equiv 5 \pmod{9}$, следва, че $M \geq 4$. От друга страна, едно възможно представяне на 2012 като сума на четири куба е

$$2012 = (-4)^3 + 5^3 + (-25)^3 + 26^3$$

и следователно $M = 4$.

Оценяване: 1 т. за $M > 2$; 3 т. за $M \neq 3$; 3 т. за $M = 4$. (1 т. за неточна оценка от порядъка на $M \leq 6$).

Задача 11.1. Да се намерят всички тройки (a, b, c) от различни реални числа от интервала $(0, 2\pi)$ за които:

1. Числата a, b, c (в този ред) образуват аритметична прогресия.

2. Числата $\sin a, \sin b, \sin c, \sin\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)$ (в този ред) образуват аритметична прогресия.

Решение. От равенствата $a + c = 2b$ и $\sin a + \sin c = 2\sin b$ получаваме

$$\sin a + \sin c = 2\sin\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2} = 2\sin b\cos\frac{a-c}{2} = 2\sin b.$$

Ако $\sin b \neq 0$, то $\cos\dfrac{a-c}{2} = 1$, което е невъзможно при $a, c \in (0, 2\pi)$ и $a \neq c$. Следователно $\sin b = 0$, т.е. $b = \pi$. Тогава $\sin\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{3b}{2}\right) = \sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$, което

означава, че разликата на аритметичната прогресия $\sin a, \sin b, \sin c, \sin\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)$ е $-\dfrac{1}{2}$. Тогава $\sin a = \dfrac{1}{2}$ и $\sin c = -\dfrac{1}{2}$. Оттук получаваме решенията $a = \dfrac{\pi}{6}, b = \pi, c = \dfrac{11\pi}{6}$ и $a = \dfrac{5\pi}{6}, b = \pi, c = \dfrac{7\pi}{6}$.

Оценяване: 2 т. за намиране на $b = \pi$; 2 т. за намиране на разликата на втората прогресия; 2 т. за намиране на a, b и c.

Задача 11.2. Върху страните на $\triangle ABC$ са избрани точки $P \in BC$, $Q \in AC$ и $R \in AB$ така, че $PQ \perp AC$ и $PR \perp AB$. Да се намери $\sphericalangle BAC$, ако $S_{PCQ} = S_{PBR} = S_{PQR}$.

Решение. (*I начин*) Да означим $CP = x$ и $BP = y$. Тогава $S_{CPQ} = \dfrac{CQ.PQ}{2} = \dfrac{x^2\sin\gamma\cos\gamma}{2}$ и аналогично $S_{BPR} = \dfrac{y^2\sin\beta\cos\beta}{2}$. Освен това

$$S_{PQR} = \frac{PQ.PR\sin\sphericalangle QPR}{2} = \frac{xy\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha}{2},$$

откъдето намираме

$$x^2\sin\gamma\cos\gamma = y^2\sin\beta\cos\beta = xy\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha.$$

Следователно $(xy\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha)^2 = (x^2\sin\gamma\cos\gamma).(y^2\sin\beta\cos\beta)$, което означава, че

$$\sin\gamma\sin\beta\sin^2\alpha = \cos\gamma\cos\beta.$$

Сега от $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ и $\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta+\gamma) = -\cos\alpha$ получаваме $\cos\alpha(1 - \cos\alpha\sin\gamma\sin\beta) = 0$. Тъй като вторият множител е винаги положителен, получаваме $\cos\alpha = 0$, т.е. $\alpha = 90°$.

(*II начин*) Нека QX, $(X \in PR)$ е височина в $\triangle PQR$. От $S_{PQR} = S_{PBR}$ следва, че $QX = BR$. Тогава $RBXQ$ е успоредник и следователно $BX \parallel RQ$. Аналогично, ако RY, $(Y \in QP$, то $CY \parallel RQ$. Тогава $BX \parallel CY$. Остава да съобразим, че X и Y са от една и съща полуравнина относно BC и единствената възможност е X, Y и P да съвпадат. Това означава, че $\sphericalangle QPR = 90°$, откъдето $\sphericalangle BAC = 90°$.

Оценяване: (*I начин*) 2 т. за изразяване на равните лица чрез елементи на триъгълника; 4 т. за намиране на $\alpha = 90°$. (*II начин*) по 1 т. за всеки от успоредниците $RBXQ$ и $CQRY$; 2 т. за $BX \parallel CY$; 2 т. за довършване нарешението.

Задача 11.3. Дадено е множеството $A = \{3, 5, 7, 9\}$. Да се намери броят на крайните множества B от естествени числа такива, че за множествата $X = \{2a+b | a \in A, b \in B\}$ и $Y = \{a+2b | a \in A, b \in B\}$ е изпълнено следното: за всеки елемент на X (съответно Y) съществува елемент на Y (съответно X) така, че разликата на двата елемента е 1.

Решение. За забележим, че всички елементи на множеството Y са нечетни числа. Това означава, че в множеството X няма нечетни числа, т.е. елементите на B са четни числа.

Ако M е най-големият елемент на B, то $9+2M$ и $2.9+M$ са най-големите елементи съответно на Y и на X. От условието следва, че тези два елемента се различават с 1, откъдето намираме $M = 8$ или $M = 10$. Аналогично, за най-малкия елемент m на B имаме $m = 2$ или $m = 4$. Следователно елементите на B са четни числа, като най-голямото от тях е 8 или 10, а най-малкото е 2 или 4.

Множествата с това свойство са 18: $\{2,4,6,8,10\}$, $\{2,6,8,10\}$, $\{2,4,8,10\}$, $\{2,4,6,10\}$, $\{2,8,10\}$, $\{2,6,10\}$, $\{2,4,10\}$, $\{2,10\}$, $\{2,4,6,8\}$, $\{2,6,8\}$, $\{2,4,8\}$, $\{2,8\}$, $\{4,6,8,10\}$, $\{4,8,10\}$, $\{4,6,10\}$, $\{4,10\}$, $\{4,6,8\}$ и $\{4,8\}$.

Директна проверка показва, че само 5 от тези множества не удовлетворяват условието на задачата: $\{2,8,10\}$, $\{2,4,10\}$, $\{2,10\}$, $\{2,8\}$ и $\{4,10\}$. Следователно търсените множества са 13.

<u>Оценяване:</u> 1 т. за наблюдението, че в B има само четни числа; по 1 т. за най-големия и най-малкия елемент на B; 4 т. за намиране на всички множества.

Задача 11.4. Нека p е просто число, а $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$ са различни естествени числа от интервала $[1, p^2]$, чиято сума се дели на p. Да се докаже, че съществуват естествени числа $b_1, b_2, \ldots, b_{2p-1}$, нито едно от които не се дели на p и такива, че:

1. Записът на всяко едно от тях в p-ична бройна система се състои само от цифрите 0 и 1.

2. Сумата $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{2p-1}b_{2p-1}$ се дели на p^{2012}.

Решение. Ще докажем твърдението за произволно естествено число n вместо 2012.

За целта ще ни е нужна следната

Лема. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ са естествени числа, които не се делят на p, то за всяко r, $1 \le r \le p-2$ можем да изберем няколко от тях, чиято сума дава остатък r при деление с p.

Доказателство. Да положим $S_0 = 0$ и да допуснем, че сме получили k, $0 \le k \le p-2$ суми $S_0, S_1, \ldots, S_k$, във всяка от които участват само числа от $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и които дават различни остатъци при деление на p. Да добавим числото x_{k+1} и да разгледаме сумите $S_0 + x_{k+1}, S_1 + x_{k+1}, \ldots, S_k + x_{k+1}$, които явно дават различни остатъци при деление с p. Ако допуснем, че тези остатъци са пермутация на $S_0, S_1, \ldots, S_k$ и съберем почленно, ще получим $(k+1)x_{k+1} \equiv 0 \pmod p$, което е невъзможно. Следователно получаваме поне един нов остатък и така по индукция ще получим всички възможни ненулеви остатъци.

Сега твърдението следва по индукция. Тъй като сумата на дадените числа се дели на p, имаме база на индукцията.

Да допуснем, че съществуват числа $b_1, b_2, \ldots, b_{2p-1}$, които удовлетворяват условието и такива, че $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{2p-1}b_{2p-1} = p^nA$, където $n \ge 1$, p не дели A. Понеже в интервала $[1, p^2]$ има точно p числа, които се делят на p, то измежду числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$ има поне $p-1$, които не се делят на p, нека без ограничение това са $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$.

Съгласно лемата без ограничение можем да примем, че за числата $a_1, a_2, \ldots, a_k$ е вярно, че сумата $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + A$ се дели на p. Сега ако положим $b_i' = b_i + p^n$ за $i = 1, 2, \ldots, k$, а $b_i' = b_i$ за $i = k+1, \ldots, 2p-1$, то новите числа удовлетворяват условието и сумата $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{2p-1}b_{2p-1}$ се дели на p^{n+1}.

<u>Оценяване:</u> 4 т. за твърдението от лемата; 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.1. Точка M върху страната AB на равностранен $\triangle ABC$ е такава, че отношението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ е равно на $\frac{CM}{BM} - 1$. Да се намери това отношение.

Решение. Можем да считаме, че $AB = 1$. Нека $BM = x$ и $CM = y$. Нека k е търсеното отношение.

(*I начин*, К. Чакърян) Имаме, че

$$2r_{\triangle ACM} = (2 - x - y)\operatorname{tg} 30^\circ, \quad 2r_{\triangle BCM} = (1 + x - y)\operatorname{tg} 30^\circ$$

и следователно

$$\frac{2-x-y}{1+x-y} = \frac{y}{x} - 1 \Leftrightarrow (y-1)(y-3x) = 0 \Leftrightarrow k = 2 \quad (\text{понеже } y < 1).$$

(*II начин*) От формулата $S = pr$ следва, че

$$\frac{1-x}{x} = k\frac{2-x+y}{1+x+y}, \quad \text{т.е.} \quad ((k+1)x-1)y = (k-1)x^2 - 2kx + 1.$$

От друга страна, $y^2 = x^2 - x + 1$ съгласно косинусовата теорема и $y = (k+1)x$ по условие. Тогава

$$y(y-1) = (k-1)(x^2 - x + 1) - (k+1)x + 2 - k = (k-1)y^2 - y + 2 - k$$

откъдето $(k-2)(y^2-1) = 0$, т.е. $k = 2$.

Забележка. От първия начин за решение следва, че $r_{\triangle AMC} = 2r_{\triangle BMC}$ точно когато $CM = 3BM$.

<u>Оценяване:</u> (*I начин*) по 1 т. за изразяване на $r_{\triangle ACM}$ и $r_{\triangle BCM}$; 4 т. за довършване на решението. (*II начин*) 2 т. за първата връзка между x и y; 1 т. за $y^2 = x^2 - x + 1$; 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.2. Да се докаже, че уравнението $\lg(\sin x) = \sin(\lg x)$ има безбройно много решения в реални числа.

Решение. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \lg(\sin x) - \sin(\lg x)$ са интервалите от вида $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, и там тя е непрекъсната. Понеже f клони към $-\infty$ в краищата на тези интервали, достатъчно е да покажем, че $f(2k\pi + \pi/2) = -\sin(\lg(2k\pi + \pi/2)) \geq 0$ за безбройно много $k \in \mathbb{Z}^+$. Това означава, че $(2m-1)\pi \leq \lg(2k\pi + \pi/2) \leq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$k \in \left[\frac{2.10^{(2m-1)\pi} - \pi}{4\pi}, \frac{2.10^{2m\pi} - \pi}{4\pi}\right].$$

Остава да съобразим, че дължината на всеки от тези интервали е по-голяма от 1 и левият му край е положителен при $m \in \mathbb{N}$; значи той съдържа естествено число.

<u>Оценяване:</u> 3 т. за свеждане на твърдението до проверка на неравенства от вида $-\sin(\lg(2k\pi + \pi/2)) \geq 0$; 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. В няколко кутии са разпределени a бели и b черни топки ($a, b \geq 1$). Колко най-много може да бъде вероятността произволно избрана топка от някоя от кутиите да е бяла? (Броят на кутиите не е фиксиран.)

Решение. Първо ще отбележим, че ако $x, y \leq 1 \leq c, d$, то (*) $x + y \leq 1 + \frac{xc+yd-1}{c+d-1}$, защото след привеждане под общ знаменател получаваме очевидното неравенство $(x-1)(d-1) + (y-1)(c-1) \leq 0$.

Да предположим сега, че в две кутии имаме c и d топки, от които съответно e и f са бели. Като положим $x = e/c$ и $y = f/d$, от (*) следва, че ако в едната кутия оставим само една топка, и то бяла, а останалите топки прехвърлим във втората кутия, то разглежданата вероятност не намалява.

И така, при даден брой $k \leq a$ на кутиите най-голяма вероятност $P(k)$ се реализира, ако в $k-1$ от кутиите сложим по една бяла топка, а в останалата кутия всички други топки; значи

$$P(k) = \frac{k-1}{k} + \frac{a+1-k}{k(a+b+1-k)} = 1 - \frac{b}{k(a+b+1-k)}.$$

При $k > a$ в a от кутиите трябва да сложим по една бяла топка, а в останалите кутии по произволен начин черните топки; значи $P(k) = \frac{a}{k}$. Имаме, че $\max_{k>a} P(k) = \frac{a}{a+1}$ и $\max_{k \leq a} P(k) = 1 - \frac{b}{k_0(a+b+1-k_0)}$, където k_0 е цялата част на $\frac{a+b+1}{2}$ при $a > b$ и $k_0 = a$ при $a \leq b$.

Следователно

$$\max P = \begin{cases} 1 - \frac{1}{a+1}, & a \leq b \\ 1 - \frac{4b}{(a+b+1)^2}, & a > b,\ a+b - \text{нечетно} \\ 1 - \frac{4b}{(a+b+1)^2-1}, & a > b,\ a+b - \text{четно.} \end{cases}$$

<u>Оценяване:</u> 2 т. за намиране на $P(k)$ при $k \leq a$; 1 т. за намиране на $P(k)$ при $k > a$; 4 т. за довършване на решението.

Задача 12.4. Съществува ли остроъгълен $\triangle ABC$ с радиус на описаната окръжност 1 такъв, че множеството $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$ е обединение на отворени кръгове с радиус, по-голям от 1?

Решение. Не. Да допуснем противното. Тогава съществува отворен кръг с радиус, по-голям от 1, който съдържа ортоцентъра H на $\triangle ABC$ и не съдържа A, B и C. Следователно отсечките AH, BH и CH пресичат границата на кръга (която е окръжност), например съответно в точки A_1, B_1 и C_1. Понеже

$$\sphericalangle B_1AC_1 \leq \sphericalangle B_1A_1C_1 < B_1HC_1 = 180^\circ - \sphericalangle BAC \leq 180^\circ - \sphericalangle B_1AC_1,$$

то $\sin \sphericalangle B_1AC_1 \leq \sin \sphericalangle B_1A_1C_1$ и значи

$$2R_{\triangle A_1B_1C_1} = B_1C_1/\sin \sphericalangle B_1A_1C_1 \leq B_1C_1/\sin \sphericalangle B_1AC_1 = 2R_{\triangle AB_1C_1}.$$

Аналогично $R_{\triangle AB_1C_1} \leq R_{\triangle ABC_1} \leq R_{\triangle ABC}$ и получаваме противоречието $R_{\triangle A_1B_1C_1} \leq 1$.

Забележка. Може да се докаже, че:

а) ако $\triangle ABC$ е остроъгълен с радиус на описаната окръжност 1, то обединението на отворените кръгове с радиус, по-голям от 1, които не съдържат A, B и C, е $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C, H\}$;

б) ако S е затворено подмножество на единичната окръжнст Γ, то $\Gamma \setminus S$ е обединение на отворени кръгове с радиус, по-голям от 1, тогава и само тогава, когато S лежи от едната страна на диаметър на Γ.

Ще отбележим, че всяко обединение на отворени кръгове с радиус, по-голям от 1, може да се представи като обединение на изброимо много такива кръгове.

<u>Оценяване:</u> 1 т. за допускане на противното (за т. H); по 2 т. за всяко от неравенствата $R_{\triangle A_1B_1C_1} \leq R_{\triangle AB_1C_1} \leq R_{\triangle ABC_1} \leq R_{\triangle ABC}$.

Задачите са предложени от: 9.1.– Петър Бойваленков; 9.2., 9.3.– Керопе Чакърян; 9.4. – Николай Белухов; 10.1., 10.3. – Иван Ланджев; 10.2., 10.4 – Стоян Боев; 11.1. – Емил Колев; 11.2, 11.3.– Емил Колев и Александър Иванов; 11.4.– Александър Иванов; 12.1.,12.2., 12.3. – Николай Николов; 12.4. – Николай Николов и Олег Мушкаров.