ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Шумен, 29.03-31.03.2019 година

Б Р О Ш У Р А

УКАЗАНИЕ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

V клас

5.1. Дадени са изразите: $A=\dfrac{2,5-2\frac{1}{3}}{2,5+3\frac{1}{3}}.\dfrac{1,4+1\frac{1}{3}}{1,4-1\frac{1}{3}}$ и $B=\dfrac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+1,3$.

А) Пресметнете A и B и ги сравнете.

Б) Задраскайте 2019-тата цифра след десетичната запетая на частното $C = A:B$ и сравнете новополучената десетична дроб със стойността на C.

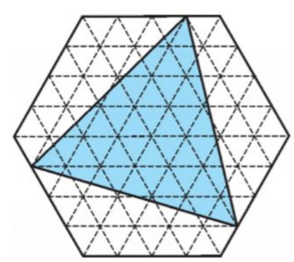
Решение:

А) $A=\dfrac{2,5-2\frac{1}{3}}{2,5+3\frac{1}{3}}.\dfrac{1,4+1\frac{1}{3}}{1,4-1\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{2}-\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}+\frac{10}{3}}.\dfrac{\frac{7}{5}+\frac{4}{3}}{\frac{7}{5}-\frac{4}{3}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{35}{6}}.\dfrac{\frac{41}{15}}{\frac{1}{15}}=\dfrac{41}{35}$ **(1 т.)**

$B=\dfrac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+1,3=\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}+1,3=\dfrac{28}{10}+\dfrac{13}{10}=\dfrac{41}{10}$ **(1 т.)** $\Rightarrow B>A$ **(1 т.)**

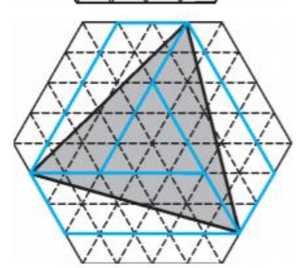
Б) $C=\dfrac{41}{35}:\dfrac{41}{10}=\dfrac{2}{7}=0,(285714)$ **(0,5 т.)**

2019:6 = 336 (ост. 3) **(0,5 т.)** $\Rightarrow$2019-тата цифра след десетичната запетая на C е 5 **(1 т.)**. Следователно новополучената дроб е по-голяма от C **(1 т.)**.



5.2. Фигурата на чертежа е съставена от еднакви равностранни триъгълници с лице 1 cm^2. Намерете лицата на оцветения триъгълник и на неоцветената част от фигурата.

Решение:



Оцветеният триъгълник се състои от 3 триъгълника с лице половината от лицето на успоредник с лице 20 cm^2 **(2 т.)** и един триъгълник с лице 9 cm^2 **(1 т.)** Следователно лицето му е: $3.(20:2)+9=39$ cm^2. **(1 т.)**

Фигурата се състои от 96 триъгълничета **(1 т.)**. Следователно лицето на неоцветената фигура е 96 – 39 = 57 cm^2. **(1 т.)**

5.3. В кутия има 100 бонбона. Ани изяла няколко бонбона. Дошла Бети, и Ани изяла още един бонбон, за да може останалото количество бонбони да се раздели по равно на двете. След това дошла Вяра и Ани отново изяла 1 бонбон, за да могат да разделят останалите бонбони по равно на трите. Към тях се присъединили последователно Галя, Деси и Ева, и всеки път Ани изяждала по един бонбон, за да може останалото количество да се разпредели по равно на събралите се момичета. Накрая дошла и Жана. Колко най-малко бонбони трябва да изяде Ани този път така, че останалото количество бонбони да се разпредели по равно на седемте момичета?

Решение: Когато дошла Жана количеството бонбони N се дели на 6. Следователно N се дели на 2 и на 3 без остатък **(1 т.)** и на 4 – с остатък 2 **(1 т.)**. Следователно N се дели на 12 с остатък 6 **(1 т.)**. N се дели на 5 - с остатък 4 **(1 т.)**, следователно се дели на 60 с остатък 54 **(1 т.)**. Т.к бонбоните са били в началото 100, то $N = 54$ **(1 т.)**. Следователно Ани трябва да изяде накрая най-малко 5 **(1 т.)** бонбона така, че останалите $54 - 5 = 49$ бонбона да се делят на седемте момичета по равно.

5.4. Може ли да се поставят 1000 папки в 22 чекмеджета, така че във всяко чекмедже след първото да има или 5 папки повече, или 6 папки по-малко от предходното?

Решение: Нека означим папките в първото чекмедже с x. Тогава във второто може да има или $x + 5$ или $x - 6$ папки, в третото или $x + 10$ или $x - 1$ или $x - 12$ **(1 т.)**. Означаваме папките в чекмеджетата с x, $x + 5$, $x + 10$, ..., $x + 105$ **(1 т.)**. Действителният брой папки в чекмеджетата се отличава от написаното число с 0 или кратно на 11 число **(2 т.)**. Сборът на всички папки в чекмеджетата е $x + x + 5 + x + 10 \ldots + x + 105 = 22x + 105.11 = 11(2x + 105)$ или по-малък с кратно на 11 число **(2 т.)**. Сумата от папките се дели на 11, но 1000 не се дели на 11, следователно не може **(1 т.)**.

VI клас

6.1. Два правоъгълни паралелепипеда са долепени един до друг, като новия правоъгълен паралелепипед е с размери 3 *cm*, 4 *cm* и 12 *cm*. Общата стена на паралелепипедите е с размери 3 *cm* и 4 *cm*. Да се намери отношението на обема на по-големия паралелепипед към обема на по-малкия паралелепипед, ако повърхнината на по-големия е два пъти по-голяма от повърхнината на по-малкия.

Решение: Нека размерите на получен ите паралелепипеди са 3, 4, x и 3, 4, 12 – x, като първият има по-голяма повърхнина. Тогава ще имаме, че повърхнината на първият ще е $24 + 14.x$, а на вторият $24 + 14(12 - x) \Rightarrow 24 + 14.x = 48 + 28(12 - x) \Rightarrow x = \frac{60}{7}$

Тогава отношението на обемите ще бъде $\frac{3.4.x}{3.4.(12-x)} = \frac{5}{2}$.

Оценяване: 1 **точка** за означаване, по **1 точка** за изразяване на двете повърхнини, 1 **точка** съставяне на за уравнение, 1 точка за намиране на неизвестното и 1 точка за отговор.

6.2. Намерете всички двойки трицифрени числа, сборът на които се дели на 296, а частното им е кратно на 3.

Решение: Нека двете числа са a и b. От условието $\frac{a}{b} = 3.k$ и $\frac{a+b}{296} = p \Rightarrow 100 \leq a = 3kb < 1000 \Rightarrow 0 < k \leq 3$ и $b \leq 333 \Rightarrow \frac{a+b}{296} < \frac{1333}{296} < 5 \Rightarrow 0 < p \leq 4$

1. сл. $k = 1, a = 3b, a + b = 4b = 296p$ намираме $b = 74p,\ a = 222p$ и $100 \leq b < a < 1000$, получаваме $2 \leq p \leq 4$.

Намираме три решения:

- при $p = 2, b = 148, a = 444$
- при $p = 3, b = 222, a = 666$
- при $p = 4, b = 296, a = 888$.

2. сл. $k = 2, a = 6b, a + b = 7b = 296p$, 7 не дели $296 \Rightarrow 7$ дели p, но $p \leq 4 \Rightarrow$ няма решение.

3. сл. $k = 3, a = 9b, a + b = 10b = 296p$, 5 не дели $296 \Rightarrow 5$ дели p, но $p \leq 4 \Rightarrow$ няма решение.

Оценяване: За разглеждане на 1сл. **2 точки**, за 2 сл. **2 точки** и за 3 сл. **2 точки**. Ако е пропуснат само един случай се дават не повече от 4 точки.

6.3. Ако числото 2^{2019} е n-цифрено, а числото 5^{2019} е m-цифрено, намерете стойността на $n + m$.

Решение: Нека $a = 2^{2019}$ и $b = 5^{2019}$. Тогава са изпълнени неравенствата:

$10^{n-1} < a < 10^n$ и $10^{m-1} < b < 10^m \Rightarrow 10^{n+m-2} < a.b < 10^{n+m}$

Но $a.b = 2^{2019}.5^{2019} = 10^{2019} \Rightarrow n + m - 2 < 2019 < n + m \Rightarrow n + m = 2020$

Оценяване: 2 **точки** за $10^{n-1} < a < 10^n$ и $10^{m-1} < b < 10^m$, 2 **точки** за $10^{n+m-2} < a.b < 10^{n+m}$, 2 **точки** за $n + m - 2 < 2019 < n + m$ и **1 точка** за отговор.

6.4. Числата от 1 до N са написани едно след друго в редица. На всеки ход изтриваме първото число, а второто го местим в края на редицата. Намерете последното число, което ще остане при: **А)** $N = 23$ **Б)** $N = 2019$

Пример: От редицата 1, 2, 3, 4, 5 след първия ход ще получим редицата 3, 4, 5, 2.

Решение: Ако N е четно ($N = 2k$),то след k хода ще остане редицата 2, 4, 6,...., $2.k \Rightarrow$ ако N е степен на 2, то накрая остава N. Нека m е числото, което е степен на 2, по – малко е от N и е възможно най – голямо. Тогава след $N - m$ хода ще останат m числа $\Rightarrow$ последното, което е $2.(N - m)$ ще остане накрая.

А) Най-близкото число, което е степен на 2 до 23 е 16. Тогава след 23 – 16 =7 хода ще останат 16 числа, като последното ще е 14 $\Rightarrow$ 14 ще остане накрая.

Б) Най-близкото число, което е степен на 2 до 2019 е 1024. Тогава след 2019 – 1024 = 995 хода ще останат 1024 числа, като последното ще е 1990 $\Rightarrow$ 1990 ще остане накрая.

Оценяване: **А) 2 точки** **Б) 5 точки**

2 точки за обосноваване, че ако N е степен на 2, то накрая остава N, **1 точка** за избор на m, **1 точка** за след $N - m$ хода ще останат m числа, **1 точка** за $2.(N - m)$ ще остане накрая и по **1 точка** за отговор на **А)** и **Б)**.

VII клас

7.1. Даден е многочлена $P(x)=x^4 + 6x^3 + x^2 + ax + b$. При кои цели стойности на a и b многочленът $P(x)$ е точен квадрат? Решете уравнението $P(x)=0$ за намерените стойности на a и b.

Решение: Без ограничение на общността може да приемем, че точният квадрат има вида $(x^2 + mx + n)^2$.

Нормалният вид на този израз е $x^4 + 2mx^3 + (m^2 +2n)\, x + 2mnx + n^2$. **(1 т.)**

Приравняваме коефициентите пред съответните степени и последователно намираме:

x^3: $2m = 6 \Rightarrow$ $m = 3$;

x^2: $m^2 + 2n = 1 \Rightarrow$ $9 + 2n = 1 \Rightarrow$ $n = -4$;

x: $a = 2mn \Rightarrow a = -24$;

свободен член: $b = n^2 \Rightarrow b = 16$. **(2 т.)**

За $a = -24$ и $b = 16$ многочленът $P(x)$ е тъждествено равен на $(x^2 + 3x - 4)^2$. **(1 т.)**

Разлагаме на множители $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, откъдето

$P(x) = (x^2 + 3x - 4)^2 = (x + 4)^2\,(x - 1)^2$. **(1 т.)**

Корените на уравнението $P(x) = 0$ намираме от $(x + 4)(x - 1) = 0$:

$x_1 = -4,\ x_2 = 1$. **(1 т.)**

7.2. В разностранния ΔABC ($AC > BC$) са построени ъглополовящата l_A на $\sphericalangle BAC$, ъглополовящата l_C на $\sphericalangle BCA$ и ъглополовящата CL на външния ъгъл при върха C. През върха B е построена права g, успоредна на CL. Правата g пресича AC в точка M. Ъглополовящата l_C и перпендикулярната права от точка M към AB се пресичат в точка Q. Ъглополовящата l_A пресича правата g в точка F. Намерете мерките на ъглите на ΔABC, ако $\sphericalangle AFM = 35°$ и $\sphericalangle MQC = 20°$.

Решение: Нека $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, а $\sphericalangle ABC = 2\beta$.

Тогава $\sphericalangle BCP = 2\alpha + 2\beta$, като външен ъгъл на ΔABC и $\sphericalangle BCL = \sphericalangle PCL = \alpha + \beta$. (1 т.)

От успоредността на правите CL и g следва,

че $\sphericalangle MBC = \sphericalangle BCL = \alpha + \beta$. (1 т.)

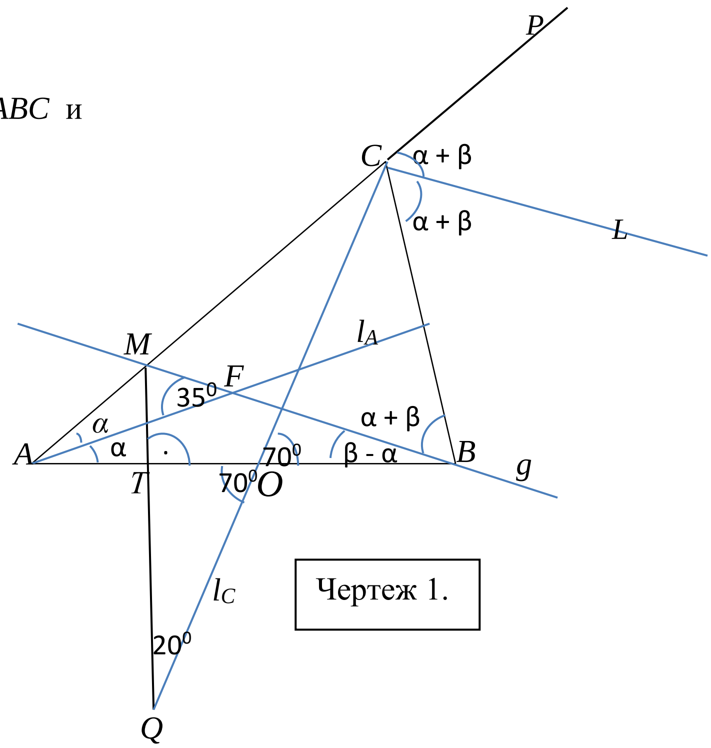
От ΔTQO – правоъгълен, $\sphericalangle TOQ = 70°$.
$\sphericalangle COB = \sphericalangle TOQ = 70°$ (върхни). (1 т.)

Ако $AC > BC$, то точка M е вътрешна за

отсечката AC ($\alpha + \beta < 2\beta$). (1 т.)

$\sphericalangle MBA = \sphericalangle ABC - \sphericalangle MBC = 2\beta - (\alpha + \beta) = \beta - \alpha$

$\sphericalangle MFA = \sphericalangle FAB + \sphericalangle FBA$ (външен за ΔFAB),



Чертеж 1.

$35° = \alpha + \beta - \alpha,\ \beta = 35°$ и тогава $\sphericalangle ABC = 2\beta = 70°$. (1 т.)

В ΔCOB $\sphericalangle OCB = 180° - 140° = 40°$. Следователно $\sphericalangle ACB = 80°,\ \sphericalangle BAC = 30°$. (1 т.)

7.3. Ливадата на фермера А е 4 *дка*. Сеното, събрано от тази ливада, стигнало на А да изхранва 3 крави в продължение точно на 8 месеца. Фермерът Б има ливада от 10 *дка*. Колко най-много кози може да изхранва Б в продължение на 6 месеца със сеното от ливадата си, ако Б е събрал с 20% повече сено от декар в сравнение с добива на А от декар и месечно изхранването на 9 кози е колкото изхранването на 4 крави? Продължителността на месеците не се взима под внимание.

Решение: Нека една крава на А месечно се нуждае от a *кг* сено. Тогава кравите на А общо са консумирали $8.3a = 24a$ *кг*, които били осигурени от сеното на А от 4 *дка*. **(2 т.)**

Следователно от един декар на А се получават $6a$ $кг$. Сеното на Б е с 20% повече, значи от един декар ще се получават $1{,}2.6a = 7{,}2a$ $кг$, а от цялата ливада Б ще си осигури $10.7{,}2a = 72a$ $кг$, което означава, че Б ще разполага с по $72a : 6 = 12a$ $кг$ сено за всеки от шестте месеца.

(2 т.)

Отчитаме, че 9 кози месечно потребяват толкова, колкото 4 крави, откъдето намираме, че месечно една коза се нуждае от $\frac{4}{9}a$ $кг$. Тогава сеното на Б ще стига точно за $12a : \left(\frac{4}{9}a\right) = 27$ кози. **(3 т.)**

7.4. Двадесет войници са строени в редица. Всеки войник освен първият съобщава на старшината разликата от броя на приятелите си в ляво от него и броя на приятелите си в дясно от него (числата са цели числа от интервала [–19; 19]). Приятелството е взаимно: ако A е приятел на B, то B е приятел на A. Докажете, че старшината би могъл сам да определи броя на приятелите на първия войник.

Решение: Нека за войника $Х_n$ означим с $Л_n$ броя на приятелите му в ляво от него и с $Д_n$ – броя на приятелите му в дясно от него. Очевидно $Д_1 = 0$ и $Л_{20} = 0$. **(1 т.)**

Нека си представим, че всеки двама приятели държат въже.

Сумата $Д_1 + Д_2 + \ldots + Д_{20}$ е равна на броя на въжетата, като сме преброили въжетата по единия им край.

Сумата $Л_1 + Л_2 + \ldots + Л_{19} + Л_{20}$ е равна на броя на същите въжета, преброени по другия им край. Тогава $Л_1 + Л_2 + \ldots + Л_{20} = Д_1 + Д_2 + \ldots + Д_{20}$. **(5 т.)**

Оттук $Д_{20} = Л_1 + (Л_2 - Д_2) + \ldots + (Л_{19} - Д_{19})$. **(1 т.)**