



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

V – VIII КЛАС

Русе, 2018 г.

РЕШЕНИЕ НА ТЕМАТА ЗА 5. КЛАС

Задача 5.1. Да се пресметне $A \cdot 0,5 + B \cdot 0,0625$, където

$$A = 20,18.237 : 5,045 + 2,018.26750 : 50,45 \text{ и } B = 1\frac{1}{3} + 2\frac{4}{15} + 3\frac{1}{5} + 4\frac{2}{15} + 5\frac{1}{15}$$

Решение: $A = \frac{2018.237}{100} \cdot \frac{1000}{5045} + \frac{2018.26750}{1000} \cdot \frac{100}{5045} = \frac{2018}{5045} \cdot (2370 + 2675) = 2018$ (3т.)

$$B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = 15 + 1 = 16$$
 (2т.)

$$\Rightarrow A \cdot 0,5 + B \cdot 0,0625 = 1009 + 1 = 1010$$
 (1т.)

Оценяване: 3 точки за намиране на А, 2 точки за намиране на В и 1 точка за отговор.

При грешно пресмятане на А, но вярни частични пресмятания до 2 точки. При грешно пресмятане на В, но вярни частични пресмятания до 1 точка.

Задача 5.2. Александър и Петър наблюдавали светофара на едно кръстовище. Точно когато пристигнали на кръстовището светнала жълтата светлина на светофара. Проследявайки работата му, те измерили по часовник, че времето на червената светлина е $\frac{3}{2}$ пъти по-малко от времето на зелената, а времето на жълтата светлина е 4 пъти по-

малко от времето на червената. След като за осемнадесети път угаснала жълтата светлина, светнала зелената и двамата приятели след 17 минути престой пресекли улицата. Колко секунди свети жълтата светлина? (Светлините на светофара се редуват - червена, жълта, зелена, жълта, червена, жълта, зелена и.т.н)

Решение: Нека жълтата светлина свети x секунди (0,5т.). Тогава червената светлина свети $4x$ секунди (0,5), а зелената - $\frac{3}{2} \cdot 4x = 6x$ секунди. (0,5т.)

Възможните подреждания са:

1 сл. ж з ж ч ж з ж ч... или 2 сл. ж ч ж з ж ч ж з ...

Т.к. жълтата светлина се е появявала 18 пъти и след нея светва зелена, за да могат двете момчета да пресекат кръстовището, 1 сл. е невъзможен. (2т.)

2 сл. ж ч ж з ж ч ж з ... – жълтите светлини са 18, червените – 9, а зелените – 8. (1т.)

$$18x + 9 \cdot 4x + 8 \cdot 6x = 17 \cdot 60$$

$$18x + 36x + 48x = 1020$$

$$102x = 1020 \quad (1т.)$$

$$x = 1020 : 102$$

$$x = 10$$

Жълтата светлина свети 10 секунди. (0,5т.)

Оценяване: За означаване 1 точка, за изразяване на останалите две светлини 1 точка.

За разглеждане на 1 сл. 2 точки и за 2 сл 2 точки и за отговор 1 точка. Ако е разгледан само един случай се дават не повече от 5 точки.

Задача 5.3. Да се намерят последните 4 цифри на числото $N = 2018^{****}$, ако N е най-малкото осемцифрено число, което се дели на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Решение: Щом се дели на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 се дели на $\text{НОК}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2520$.

(2т.)

Тъй като $20180000 : 2520 = 8007$ (остатък 2360) (2т.) \Rightarrow трябва да допълним остатъка до 2520 (2т.) $\Rightarrow 20180000 + (2520 - 2360) = 20180160$ е търсеното число. (1т.)

Оценяване: 2 точки за извод, че НОК дели търсеното число; 2 точки за извод, че трябва да се допълни остатъка и по 1 точка съответно за намиране на остатъка и отговора. Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

Задача 5.4. Дъска 8×8 е разделена на 64 единични квадратчета, които са боядисани в бяло. Оцветете част от квадратчетата в черно така, че до всяко черно квадратче да има точно две съседни черни квадратчета, а до всяко бяло квадратче да има точно две съседни бели квадратчета и

а) броят белите квадратчета да е равен на броят на черните квадратчета;

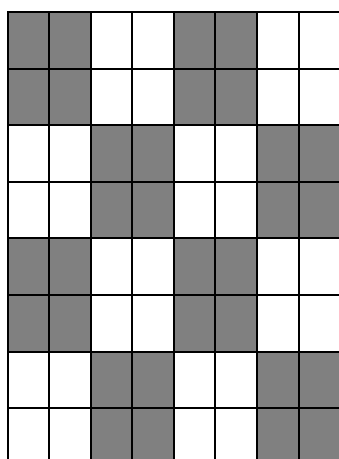
б) белите квадратчета да са 36, а черните квадратчета да са 28

в) белите квадратчета да са 24, а черните квадратчета да са 40.

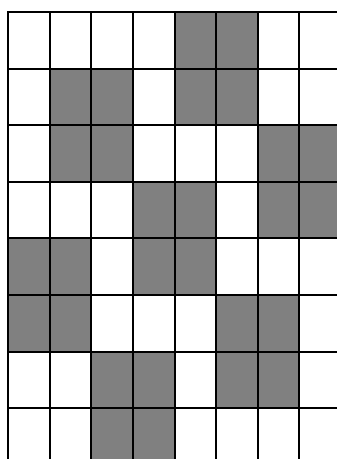
Две квадратчета са съседни, ако имат обща страна.

Решение: Като започнем от горният ляв ъгъл с бяло квадратче и оцветяваме като спазваме условието се получават 8 различни оцветявания. Аналогично ще получим още 8 като започнем с черно.

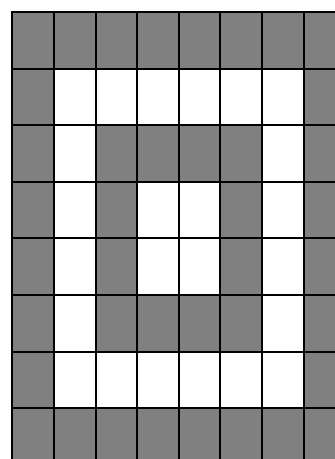
а)



б)



в)



Оценяване: а) 2 точки б) 2 точки в) 3 точки

РЕШЕНИЕ НА ТЕМАТА ЗА 6. КЛАС

Задача 6.1. Във всяко поле на таблица 2×2 е записано цяло число. Съседните в колона числа имат разлика 2, а съседните в ред – частно три. Намерете записаните числа.

Решение: Отг.: $(-3, -3, -1, -1)$ и $(1, 1, 3, 3)$

Различните случаи, отговарящи на условията за първия ред и за двете колони, са посочени в четирите таблици:

| | |
|---------|----------|
| x | $3x$ |
| $x - 2$ | $3x - 2$ |

| | |
|---------|----------|
| x | $3x$ |
| $x - 2$ | $3x + 2$ |

| | |
|---------|----------|
| x | $3x$ |
| $x + 2$ | $3x - 2$ |

| | |
|---------|----------|
| x | $3x$ |
| $x + 2$ | $3x + 2$ |

Ако
о
раз
ме

ним местата на x и $3x$, ще се получат симетрични таблици, които няма да доведат до нови стойности за x . Остава да проверим за кое x е изпълнено условието във втория ред. (2 т.)

Получаваме осем уравнения:

| | |
|---------|----------|
| x | $3x$ |
| $x - 2$ | $3x - 2$ |

$3x - 6 = 3x - 2$ или $x - 2 = 9x - 6$
няма решение. $x = \frac{1}{2}$ решението не е цяло число .
(1 т.)

| | |
|---------|----------|
| x | $3x$ |
| $x - 2$ | $3x + 2$ |

$3x - 6 = 3x + 2$ или $x - 2 = 9x + 6$
няма решение. $x = -1$, числата са $-1, -1, -3, -3$.
(1 т.)

| | |
|---------|----------|
| x | $3x$ |
| $x + 2$ | $3x - 2$ |

$3x + 6 = 3x - 2$ или $x + 2 = 9x - 6$,
няма решение. $x = 1$, числата са $1, 1, 3, 3$.
(1 т.)

| | |
|---------|----------|
| x | $3x$ |
| $x + 2$ | $3x + 2$ |

$3x + 6 = 3x + 2$ или $x + 2 = 9x + 6$
няма решение. $x = -\frac{1}{2}$ решението не е цяло число.
(1 т.)

Задача 6.2. От метален прът с форма на цилиндър с радиус r и дължина $2kr$ ($k \in \mathbb{N}$) произвели възможно най-много метални топчета със същия радиус. От металните

отпадъци отливали нов метален прът със същия радиус и отново произвели същите топчета. След четвъртото отливане се оказало, че не могат да се произвеждат повече топчета.

а) Ако металният прът е с дължина $2r$, колко пъти обемът на отпадъчния метал е по-малък от обема на топчето.

б) Намерете стойността на k , при която могат да се направят най-много метални топчета?

Решение: Отг: а) два пъти; б) при $k = 54$ произвели 80 топчета .

а) Обемът на отпадъка ще намерим като разлика от обемите на цилиндъра и кълбото.

$$V_{\text{ц}} = 2r\pi r^2 = 2\pi r^3, \quad V_{\text{к}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (1т.)} \Rightarrow V_{\text{отп.}} = V_{\text{ц}} - V_{\text{к}} = 2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ (1т.)} \Rightarrow$$

$$V_{\text{к}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow \text{два пъти (1т.)}$$

б) Едно топче се произвежда от цилиндричен прът с радиус r дължина $2r$. Отпадъкът има обем равен на $\frac{1}{3} V_{\text{ц}}$. При четвъртото отливане е останал отпадък по-малък от обема на цилиндъра, следователно $\frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ или $\frac{2}{3} V_{\text{ц}}$ (1т.). По-голям отпадък остава от производството на повече топчета, което искаме да намерим. Задачата ще решим отзад напред, като при различните случаи ще разглеждаме тези, при които са произведени повече топчета (2т.).

| | Брой произведени топчета = k | Отпадък от предходно отливане | Брой произведени топчета = k | Отпадък от предходно отливане |
|-------------------|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| четвърто отливане | | $\frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ | 0 | $\frac{2}{3} V_{\text{ц}}$ |
| Произведено | 1 | 0 | 2 | 0 |
| | | | или 1 | $\frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ |
| трето отливане | | $3 \cdot \frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ | разглеждаме 2 | $6 \cdot \frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ |
| Произведено | 3 | 0 | 6 | 0 |
| | | | или 5 | $\frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ |
| второ отливане | | $9 \cdot \frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ | разглеждаме 6 | $18 \cdot \frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ |
| Произведено | 9 | 0 | 18 | 0 |
| | | | или 17 | $\frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ |
| първо отливане | | $27 \cdot \frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ | разглеждаме 18 | $54 \cdot \frac{1}{3} V_{\text{ц}}$ |
| Произведено | 27 | 0 | 54 | 0 |

Ако $k > 54$ след четвъртото отливане ще остане поне още $\frac{1}{3}V_{\text{ц}} \Rightarrow$ ще може да се произведе ново топче (1т.).

Задача 6.3. Сборът на три естествени числа $a < b < c$ е 2018. При деление на b с $2a$ и на c с $2b$ се получава частно едно и един и същи остатък. Намерете тези числа, в случая когато:

- а) число a приема възможно най-голяма стойност;
- б) число a приема възможно най-малка стойност.

Решение: Означаваме с r остатъка при описаните деления. Тогава $b = 2a + r$ и $c = 2b + r$. От първото равенство имаме $2b = 4a + 2r$, откъдето $c = 4a + 3r$.

Сега $a + b + c = a + 2a + r + 4a + 3r = 7a + 4r = 2018$ (1т.).

Следователно a е четно число (1т.). Тъй като $0 \leq r < 7a$, то $7a < 7a + 4r < 11a$, т.е. $7a \leq 2018 < 11a$ (1т.).

а) От ограничението $7a \leq 2018$ следва, че възможно най-голямата стойност на a е 288, но при нея остатъкът е $\frac{1}{2}$ (1т.). Следващата възможна стойност е $a = 286$, при която $r = 4$.

Следователно $a = 286$ е търсената възможно най-голяма стойност. Тогава $b = 576$, $c = 1156$ (1т.).

б) От ограничението $11a > 2018$ следва, че $a > 183$. Проверяваме за $a = 184$, че остатъкът r не е цяло число (1т.). При $a = 186$ остатъкът r е 179. Следователно $a = 186$ е търсената възможно най-малка стойност. Тогава $b = 551$, $c = 1281$ (1т.).

Задача 6.4. Докажете, че за всяко деветнадесетцифрено число, което не съдържа цифрата 0 в десетичния си запис, може да се задраскат няколко цифри, така че полученото число да се дели на 37.

Решение: Числото 37 дели 111 \Rightarrow 37 дели и $a.111 = \overline{aaa}$ (1т.). За записа на числата са използвани цифрите 1, 2, ..., 9 (9 цифри). За запис на деветнадесетцифрено число са необходими 19 цифри, следователно от принципа на Дирихле ще има цифра, която е записана поне 3 пъти (3т.). Нека означим тази цифра с a . Задраскваме всички цифри без трите цифри a . Остава числото $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37 \Rightarrow$ полученото число отговаря на условието (3т.).

РЕШЕНИЕ НА ТЕМАТА ЗА 7. КЛАС

Задача 7.1.

а) Намерете стойностите на параметъра a , за които уравнението $||x| + 2018 - a| = 2$ има три различни решения.

б) При кои стойности на параметъра a уравненията $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 1)$ и $||x| + 2018 - a| = 2$ имат общо решение.

Решение:

а) Уравнение (1) се свежда до $|x| = a - 2016$ и $|x| = a - 2020$. Двете уравнения имат точно три различни решения, ако едното има един корен, а другото - две различни решения или ако и двете уравнения имат по две решения, от което едното е общо. След разглеждане на случаи се оказва, че $a = 2020$.

За решаване на всяко уравнение – по 1 т. За двата случая – 2 т. Общо за а) 4 точки

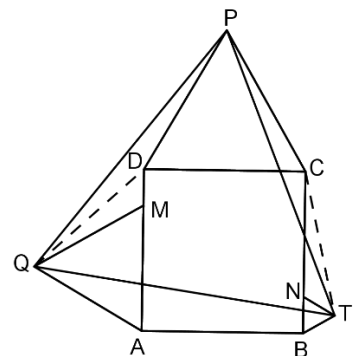
б) Второто уравнение се свежда до $(x+1)(x^2+x+1) = 0$ (0,5 т.) Единственият корен на второто уравнение е $x = -1$. (0,5 т.)

Първото уравнение при $a = 2017$ има решение $x = 1$ и $x = -1$ и при $a = 2021$ има решение $x = 1$, $x = -1$, $x = 5$ и $x = -5$. Общият им корен е $x = -1$. (1 т.)

Задача 7.2. Върху страните AD и BC на квадрата $ABCD$ са избрани съответно точки M и N такива, че $AM + BN = AB$. Навън от квадрата са построени равностранните триъгълници: $\triangle AMQ$, $\triangle BNT$ и $\triangle DCP$. Да се докаже, че $\triangle TPQ$ е равностранен.

Решение: Построяваме отсечките QD и TC . Доказваме, че $\triangle DQM \cong \triangle TCN$ (1,5 т.) според първи признак за еднаквост. Следователно $DQ = TC$, $\angle DQM = \angle TCN = \alpha$.

Доказваме, че $\angle PDQ = 150^\circ + \alpha$, $\angle PCT = 150^\circ + \alpha$ (1 т.), от тук $\triangle PDQ \cong \triangle PCT$ (I признак) (1,5 т.). Тогава $\triangle PQT$ е равнобедрен ($PQ = PT$) и тъй като $\angle QPT = \angle DPC = 60^\circ$, следователно $\triangle TPQ$ е равностранен. (2 т.)



Задача 7.3. Иван реже квадрат по права линия на две части. След това на всеки ход реже по същия начин на две части някое от парчетата. След n такива рязания, Иван пресмята височината на рязането: на всеки триъгълник дава по 2 точки, а на всеки четириъгълник поставя по 1 точка и събира точките (височината на рязането = 2.броя на триъгълниците

+ броя на четириъгълниците). Съществува ли такова число n , че височината на рязането да е по-голяма от 2018?

Решение: Нека a е броят на триъгълниците, а b е броят на четириъгълниците при рязането. Да означим с S_n броят на върховете на получените парчета след n – тото рязане. С всяко рязане по права линия броят на върховете расте с най-много 4 и получените многоъгълници са изпъкнали. Следователно $S_n \leq 4 + 4n$. От друга страна броят на върховете $S_n \geq 3a + 4b + 5(n + 1 - a - b)$. Тогава $4 + 4n \geq 3a + 4b + 5(n + 1 - a - b)$
 $\Rightarrow 2a + b \geq n + 1$ т.е. след 2017 рязания височината на рязането ще е по-голяма или равна на 2018.

Задача 7.4. Върху всяка от девет картички е написано по едно цяло число между 1 и 9, като се изпълнява следното условие: колкото и картички да вземем, сумата от написаните върху тях числа да не се дели на 10. Да се докаже, че върху деветте картички е написано едно и също число.

Решение: Нека написаните числа са $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$. Допускаме, че върху картичките са написани поне две различни числа $a_1 \neq a_2$. Да разгледаме сумите:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9$$

Ако последната цифра на някои от тези суми е 0 получаваме противоречие с условието.

Ако две различни суми завършват на една и съща цифра от по-голямата сума изваждаме по-малката сума и получаваме отново противоречие с условието.

Остава случая, когато всички последни цифри на сумите S_1, S_2, \dots, S_9 са всички различни цифри от 1 до 9. Значи някоя от сумите (например S_k) завършва на a_2 и това не е S_1 . Тогава $S_k - a_2$ се дели на 10 и отново получаваме противоречие с условието. Следователно допускането, че има две различни числа $a_1 \neq a_2$ не е вярно, значи на всички картички е написано едно и също число.

РЕШЕНИЕ НА ТЕМАТА ЗА 8. КЛАС

Задача 8.1. Намерете всички естествени прости числа p и q , за които уравнението $x^2 + px + q = 100$ има два различни цели корена.

Решение: Сумата и произведението на корените не могат да са нечетни едновременно, следователно поне един от коефициентите е равен на 2. (0,5т.).

- При $p = q = 2$, уравнението $x^2 + 2x - 98 = 0$ няма цели корени; (0,5т.).
- Нека $q = 2$, p е нечетно. Корените на уравнението $x^2 + px = 98$ са с различни знаци и ще търсим положителния. В равенството $x(x + p) = 98$ множителите са с различна четност. $98 = 2 \cdot 7^2$ и следователно: $p = 7, 47, 97$.
- Нека $p = 2$, q е нечетно. Уравнението може да се запише: $(x + 1)^2 = 101 - q$, т.е. $101 - q$ е четен точен квадрат и може да бъде: 64, 36, 16 или 4. След проверка, решенията са: $q = 37$ или 97.

За всяко вярно намерено решение по 1 т.

Отговор: $(p, q) = (2, 37); (2, 97); (7, 2); (47, 2); (97, 2)$

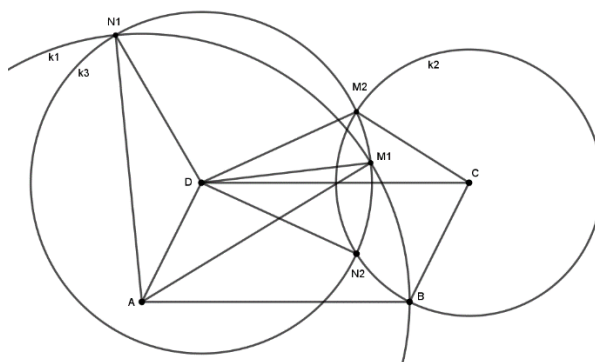
Задача 8.2. Даден е успоредник $ABCD$, за който $AB = 6 \text{ cm}$ и $AD = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. Окръжност k_1 с център във върха A минава през върха B . Втора окръжност k_2 с център точка C също минава през върха B . Окръжност k_3 с произволен радиус и център точка D пресича k_1 и k_2 съответно в точките M_1, N_1 и M_2, N_2 . Намерете отношението $M_1N_1 : M_2N_2$.

Решение: $\triangle VADM_1 \cong \triangle VCM_2D$ по III признак. (2 т.) Следователно имат равни лица.

$\triangle VDM_1N_1$ равнобедрен и M_1N_1 е удвоеното разстояние от точка M_1 до AD , т.е.

дължината на M_1N_1 е два пъти по-голяма от височината в $\triangle VADM_1$ (1 т.). Аналогично дължината на M_2N_2 е два пъти по-голяма от височината към страната CD в $\triangle VCM_2D$. (1т.)

Следователно $M_1N_1 : M_2N_2 = 6 : 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (2 т.).



Задача 8.3. Полетата на таблица 5×8 отначало са бели. На всеки ход се избира правоъгълник от три полета и всяко от тях се преоцветява от бяло в черно или обратно.

а) Колко най-много черни полета може да има в таблицата в даден момент?

б) Начертайте всички възможни постижими таблици с максимален брой черни полета.

в) определете минималния брой ходове, с които може да бъде получена всяка от таблиците в б).

Решение: Да номерираме полетата, както следва:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |

При всеки ход се променя цветът на точно по едно поле с 1, 2 и 3, така че броят на черните полета от всеки вид трябва да е еднакъв. Но има 14 полета от вид 2 и по 13 от останалите видове, така че поне едно поле от вид 2 ще е бяло. Ако това поле е единствено, то трябва да носи номер 2 и при двете номерации, а такива са само полетата в ред 3, колони 3 или 6. (4 т.)

Всяко поле с номер 1 трябва да бъде преоцветено, така че са нужни поне 13 хода. (1 т.) В долната таблица е показано как може получим бяло поле само в ред 3, колона 3 с 13 хода (правоъгълниците са обозначени с 13 различни букви): (1 т.)

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>a</i> | <i>a</i> | <i>a</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>e</i> | <i>e</i> |
| <i>b</i> | <i>b</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>f</i> | <i>f</i> | <i>f</i> |
| <i>g</i> | <i>h</i> | | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>k</i> | <i>k</i> | <i>k</i> |
| <i>g</i> | <i>h</i> | <i>i</i> | <i>i</i> | <i>i</i> | <i>l</i> | <i>l</i> | <i>l</i> |
| <i>g</i> | <i>h</i> | <i>j</i> | <i>j</i> | <i>j</i> | <i>m</i> | <i>m</i> | <i>m</i> |

Аналогично постъпваме за полето в ред 3, колона 6. (1 т.)

Отговор: а) 39 черни полета; б) таблица от черни полета, освен полето в ред 3, колони 3 или 6; в) 13 хода.

Задача 8.4 Докажете, че най-малкото естествено n , за което равенството $50 \cdot i^n + 7 \cdot j^n = 2018k^n$ е вярно само за краен брой цели числа i, j, k , е $n=3$.

Решение: При $n=1$ има безбройно много решения, например $i=37m, j=24m, k=m$ за всяко цяло m (1 т.). При $n=2$ има безбройно много решения, например $i=19m, j=4m, k=3m$ за всяко цяло m (2 т.). Нека $n=3$. Явно $(0;0;0)$ е решение. Да допуснем, че има и друго решение; след съкращаване на най-големия общ делител на k, m, n можем да считаме, че той е 1 (1 т.). При деление с 7 остатъците на точните трети степени могат да са само 0 и ± 1 (1 т.). Понеже 2018 дава остатък 2 при деление на 7, равенство по модул 7

може да има само ако k и n се делят на 7 (1 т.). Но тогава $7m^3$ се дели на 7^3 , така че и m се дели на 7: противоречие (1 т.).

Задачите са предложени:

5.1 и 5.3 Иван Ангелов; 5.2 Катя Чалъкова; 5.4 Емил Карлов

6.1 и 6.4 Велислав Йончев, 6.2 и 6.3 Таня Тонова

7.1 и 7.3 Йовка Николова; 7.2 Юлиан Цветков; 7.4 Емил Карлов

8.1 и 8.2 Гергана Николова; 8.3 и 8.4 Ивайло Кортезов

ДОЦ. Д-Р ИВАЙЛО СТАРИБРАТОВ

Председател на Националната комисия

За мнения и препоръки: math_4_8@schoolmath.eu