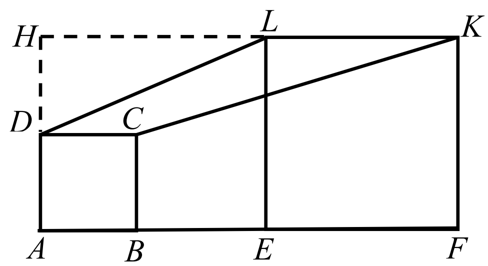
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

31 март – 1 април 2014 г., Русе

Задачи, решения, оценяване

5.1. На отсечката AF с дължина 9 см са построени два квадрата $ABCD$ и $EFKL$, както е показано на чертежа вдясно. Намерете лицето на трапеца $DCKL$, ако $AB = 2$ см и $EF = 6$ см.



Решение: Височината на трапеца е
$DH = AH - AD = EL - AD = 6 - 2 = 4$ см и оттук намираме лицето на трапеца
$S_{DCKL} = \frac{DC \quad LK}{2} \cdot DH = \frac{2+}{} \cdot 4 = 16$ кв. см.

Оценяване: 2 точки за намиране на височината, 2 точки за формулата за лице на трапец и 2 точки за получаване на отговора.

5.2. Да се пресметне сборът $1 + \frac{3}{2.2} + \frac{5}{6.6} + \frac{7}{12.12} + \frac{9}{20.20} + \frac{11}{30.30} + \frac{13}{42.42} + \frac{15}{56.56}$, като отговорът трябва да е записан като несъкратима дроб.

Решение: $$1+\frac{3}{2.2}+\frac{5}{6.6}+\frac{7}{12.12}+\frac{9}{20.20}+\frac{11}{30.30}+\frac{13}{42.42}+\frac{15}{56.56}=$$

$$=1+\frac{3}{1.4}+\frac{5}{4.9}+\frac{7}{9.16}+\frac{9}{16.25}+\frac{11}{25.36}+\frac{13}{36.49}+\frac{15}{49.64}=$$

$$=1+1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}=2-\frac{1}{64}=\frac{127}{64}$$

Оценяване: За първото представяне 3 точки, за второто представяне 2 точки и за получаване на отговора 1 точка**.** Ако се пресмята с привеждане под общ знаменател, се присъждат максималните 6 точки при получаване на верния отговор; в случай, че не е получен верният отговор, максималната оценка е 4 точки, от които се отнема по 1 точка за всяка техническа грешка след първата.

5.3. Намерете колко четирицифрени естествени числа дават един и същ остатък 5 при деление на 7 и на 41. Кое е най-малкото число с различни цифри от този вид?

Решение: Нека търсеното число е n. От условието следва, че $n-5=7t$ и $n-5=41m$. Следователно числото $n-5$ се дели на най-малкото общо кратно на 7 и 41, което е 287. Получаваме, че $n=287k+5$. Най-малкото k, за което n е четирицифрено число, е $k=4$, а най-голямото е $k=34$. Заключаваме, че числата са 31 на брой. С непосредствена проверка установяваме, че най-малкото число с различни цифри, което изпълнява условията на задачата, е 2014 и се получава при $k=7$.

Оценяване: по 1 точка за представянията $n-5=7t$, $n-5=41m$ и $n=287k+5$ или еквивалентни изкази; 2 точки за извод, че числата са 31 на брой; 2 точки за верен отговор и доказателство, че намереното число е най-малкото.

5.4. Някои от момчетата от $5^{А}$ се записали в 5 списъка да тренират пет вида спорт: списък № 1 (атлетика), списък № 2 (баскетбол), списък № 3 (волейбол), списък № 4 (гимнастика) и списък № 5 (десетобой). Всяко момче имало право да се запише в колкото списъка пожелае. Изненадата била голяма, когато се установило, че за всеки два списъка броят на момчетата, записали се едновременно и в двата списъка, е равен на сбора от номерата на тези два списъка. Например в списъците по атлетика (№ 1) и волейбол (№ 3) имало точно четири момчетата, които фигурирали и в двата списъка (1 + 3 = 4), а в списъците по баскетбол (№ 2) и десетобой (№ 5) имало точно седем момчетата, които били и в двата списъка (2 + 5 = 7). Намерете възможно най-малкия брой момчета от $5^{А}$ клас, които са се записали в тези 5 списъка. Дайте пример на такова записване.

Решение: Ще докажем, че момчетата в петте списъка са поне 10. Да допуснем, че са най-много 9. Но списъците на гимнастиците (№ 4) и на десетобойците (№ 5) ще съдържат едновременно имената на 9 момчета (4 + 5 = 9) и следователно от допускането следва, че момчетата в петте списъка са точно 9. Получаваме още, че всеки от списъците № 4 и № 5 съдържа всичките 9 момчета. Да разгледаме сега списъка на атлетите (№ 1). Той ще съдържа само 5 от всичките 9 момчета, защото заедно с пълния списък № 4 трябва да има точно 5 общи имена. Но тогава общите имена в списъците № 1 и № 5 трябва да са 6, защото 1 + 5 = 6. Това е невъзможно, защото видяхме, че № 1 е само от 5 момчета.

Ето пример на 10 момчета в петте списъка, в който момчетата са означени с буквите А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И и К:

атлетика (№ 1)	**баскетбол (№ 2)**	**волейбол (№ 3)**	**гимнастика (№ 4)**	**десетобой (№ 5)**
	А	**А**	**А**	**А**
	Б	**Б**	**Б**	**Б**
	В	**В**	**В**	**В**
	Г	**Г**	**Г**	**Г**
Д		**Д**	**Д**	**Д**
Е		**Е**	**Е**	**Е**
Ж		**Ж**	**Ж**	**Ж**
З	**З**		**З**	**З**
И	**И**		**И**	**И**
К	**К**	**К**		**К**

Оценяване: 2 точки за доказване, че n трябва да е поне 10; 5 точки за построяване на пример.