МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

31 март – 1 април 2014 г., Русе

Задачи, решения, оценяване

6.1. Сравнете числата $\frac{2}{a}$ и $\frac{1}{b-2}$, ако знаете, че $b=\frac{1}{\frac{1}{572}+\frac{1}{1364}}$ и

$$a=\left(1024.\frac{32}{23}-1\right)+\left(512.\frac{32}{23}-2\right)+\left(256.\frac{32}{23}-4\right)+...+\left(2.\frac{32}{23}-512\right)+\left(\frac{32}{23}-1024\right).$$

Решение: Намираме стойността на $b=\frac{1}{\frac{1}{13.44}+\frac{1}{31.44}}=\frac{13.31.44}{31+13}=13.31=403$.

За да намерим *a*, използваме представянето:

$a=(1024+512+...+4+2+1)\cdot\frac{32}{23}-(1+2+4+...+512+1024)$ и като използваме, че $1+2+2^2+...+2^{10}=2047$, получаваме $a=2047.\left(\frac{32}{23}-1\right)=2047.\frac{9}{23}=801$. Сравняваме получените стойности $\frac{2}{a}=\frac{2}{801}>\frac{2}{802}=\frac{1}{401}=\frac{1}{b-2}$.

Оценяване: 2 точки за намиране на b, 3 точки за намиране на a, от които по 1 точка за всеки от необходими етапи; 1 точка за завършване на решението.

6.2. На всяка от страните на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са взети точки по следния начин: на страната AB точка M, за която $AM=3MB$; на страната BC точка N, за която $CN=5NB$; на страната CD точка P, за която $CP=7PD$ и на страната AD точка T, за която $AT=2TD$.

а) Ако лицето на триъгълник ACD е 12 кв. см, намерете лицата на триъгълниците DPT и APC.

б) Ако лицето на шестоъгълника $AMNCPT$ е 46 кв. см, намерете лицето на дадения четириъгълник.

Решение: а) Триъгълниците ACD и APC имат обща височина h от върха A. Така получаваме, че $S_{APC}=\frac{1}{2}.\frac{7}{8}CD.h=\frac{7}{8}S_{ACD}=\frac{21}{2}$ кв. см. Триъгълниците APD и DPT също имат обща височина h_1, но от върха P. Така получаваме, че

$$S_{DPT}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}AD.h_1=\frac{1}{3}S_{APD}=\frac{1}{3}(12-10,5)=0,5 \text{ кв. см.}$$

б) Доказваме аналогично на а) подусловие, че $S_{DPT}=\frac{1}{3}S_{DPA}=\frac{1}{3}.\frac{1}{8}S_{ACD}=\frac{1}{24}S_{ACD}$ и $S_{MBN}=\frac{1}{4}S_{ABN}=\frac{1}{4}.\frac{1}{6}S_{ABC}=\frac{1}{24}S_{ABC}$. Оттук $S_{DPT}+S_{MBN}=\frac{1}{24}S_{ACD}+\frac{1}{24}S_{ABC}=\frac{1}{24}S_{ABCD}$ и следователно $S_{AMNCPT}=\frac{23}{24}\ {}_{ACBD}$. Тогава $S_{ABCD}=\frac{24}{23}\ {}_{AMNCPT}$ 48 кв. см.

Оценяване: за а) подусловие 2 точки, от които по 1 точка за всяко от търсените лица; за б) подусловие 4 точки, от които по 1 точка за изразяване лицата на триъгълниците MBN и DPT, 1 точка за изразяване лицето на шестоъгълника и 1 точка за завършване на решението.

6.3. Учениците от една школа решили общо 480 задачи. Момчетата решили по един и същ брой задачи, а всяко момиче решило с две задачи повече от всяко момче. Броят задачи, решени от момичетата, е равен на броя задачи, решени от момчетата. Колко са учениците в школата, ако броят им е число, кратно на 11 ?

Решение: Момичетата и момчетата са решили по 240 задачи. Ако броят задачи, решени от всяко момче, е n, то броят задачи, решени от всяко момиче, е $n+2$, като и двете числа са делители на 240. Намираме делителите на 240 и определяме възможностите за n и $n+2$. Получаваме двойките $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(6,8)$, $(8,10)$, $(10,12)$. За всяка една от двойките намираме съответния брой момчета и момичета. При $n=1$, $n+2=3$ момчетата са 240, а момичетата 80 и общият брой е 320, което не се дели на 11. При $n=2$, $n+2=4$ момчетата са 120, а момичетата 60 и общият брой е 180, което не се дели на 11. При $n=3$, $n+2=5$ момчетата са 80, а момичетата 48 и общият брой е 128, което не се дели на 11. При $n=4$, $n+2=6$ момчетата са 60, а момичетата 40 и общият брой е 120, което не се дели на 11. При $n=6$, $n+2=8$ момчетата са 40, а момичетата 30 и общият брой е 70, което не се дели на 11. При $n=8$, $n+2=10$ момчетата са 30, а момичетата 24 и общият брой е 54, което не се дели на 11. При $n=10$, $n+2=12$ момчетата са 24, а момичетата 20 и общият брой е 44, което се дели на 11.

Оценяване: 1 точка за съобразяване че броят задачи n и $n+2$ са делители на 240; 3 точки за намиране на делителите и съответните двойки; 3 точки за намиране броя на момчетата и момичетата във всеки от случаите. За всеки пропуснат случай се отнема 1 точка.

6.4. В шест кутии има съответно 1 топка, 2 топки, 3 топки, 4 топки, 5 топки и 6 топки. Нека в кутия A има a на брой топки, а в кутия B има b на брой. Разрешена е следната операция: ако $a\geq 2b$, взимаме точно $2b$ топки от A и ги поставяме в B. Намерете колко най-много топки можем да съберем в една кутия, като използваме само тази операция.

Решение: Броят на топките в кутията, в която прибавяме, е число, кратно на 3, след прибавянето. Максималният брой топки, който можем да съберем в една кутия, е получен след прибавяне на топки. Следователно търсеният максимален брой е кратен на 3. Общият брой топки е 21, което е число, кратно на 3. Да допуснем, че е възможно да се съберат 21 топки в някоя кутия. Това може да се случи само ако в кутия със 7 топки се добавят 14 топки от друга кутия. С други думи, в една кутия има 7 топки, а в друга има 14 топки и в останалите четири кутии няма топки. Но поне в едната от тези две кутии топките трябва да са получени след прибавяне на топки, което означава, че броят там е кратен на 3. Двете числа 7 и 14 не са кратни на 3 и заключаваме, че допускането е невъзможно. Остава да проверим дали можем да съберем 18 топки в една кутия. Ето един възможен вариант: (1,2,3,4,5,6) → (1,6,3,4,1,6) → (1,0,9,4,1,6) → (1,0,1,12,1,6) →(1,0,1,0,1,18).

Оценяване: 1 точка за съобразяване, че максималният брой топки след операцията е кратен на 3; 3 точки за обосновано доказване, че не може да се получат 21 топки; 3 точки за пример за получаване на 18 топки.