МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

31 март – 1 април 2014 г., Русе

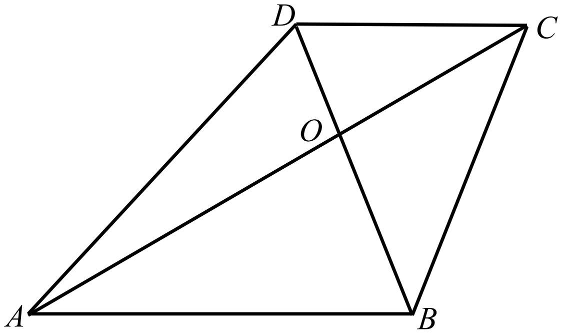
Задачи, решения, оценяване

7.1. От град A за град B в 8 часá едновременно тръгнали камион със скорост 60 км/ч и лека кола със скорост 90 км/ч. В град C, намиращ се на пътя между A и B, камионът спрял да разтовари стока и след престой от 1 ч 20 мин продължил към B със скорост 65 км/ч. Леката кола стигнала в B, престояла 1 ч 8 мин, тръгнала обратно към A със скорост 120 км/ч и срещнала камиона 1 ч 36 мин след тръгването му от C. В колко часá и на какво разстояние от B леката кола е срещнала камиона, ако разстоянието от C до B е два пъти по-голямо от разстоянието от A до C?

Решение: Нека разстоянието от A до C е x км. Тогава времето за движение на камиона от A до C е $\frac{x}{60}$ ч и времето от тръгването на камиона до срещата е $\frac{x}{60}+1\frac{1}{3}+\frac{}{5}$ ч. Разстоянието, изминато от камиона от C до срещата, е $\frac{8}{5}.65=104$ км. Колата изминава $3x$ км от A до B със скорост 90 км/ч и $2x-104$ км от B до срещата със скорост 120 км/ч. Така времето от тръгването на колата от A до срещата е $\frac{3x}{90}+1\frac{2}{15}+\frac{2x-104}{120}$ ч. Съставяме уравнението $\frac{x}{60}+\frac{4}{3}+\frac{8}{5}=\frac{x}{30}+\frac{17}{15}+\frac{x-52}{60}$, откъдето получаваме $x=80$ км. Тогава разстоянието от B до срещата е $2.80-104=56$ км. От тръгването на камиона и леката кола до срещата им са изминали 4 ч 16 мин. Следователно срещата е била в 12 ч 16 мин.

Оценяване: 4 точки за съставяне на уравнение (модел), от които по 1 точка за частични резултати, необходими за модела; 1 точка за решаване на уравнението; 1 точка за завършване на решението.

7.2. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \| CD$), диагоналите на който се пресичат в точка O. Да се намерят ъглите на трапеца, ако $AO=BC$, $BO=CD$ и диагоналът AC е ъглополовяща на $\angle BCD$.



Решение: Тъй като $\angle ACB=\angle ACD$ (AC е ъглополовяща по условие) и $\angle BAC=\angle ACD$ (кръстни), заключаваме, че $\angle ACB=\angle BAC$, т.е. ΔACB е равнобедрен и

$AB = BC$. Тогава $AB = AO$ (защото $AO = BC$ по условие), т.е. ΔABO е равнобедрен и $\angle ABO = \angle AOB$. Но $\angle ABO = \angle ODC$ (кръстни) и $\angle AOB = \angle DOC$ (връхни). Получаваме, че $\angle ODC = \angle DOC$. Следователно ΔDOC е равнобедрен и $CD = OC$. По условие $BO = CD$ и следователно $BO = OC$. Така излиза, че ΔBCO е равнобедрен и $\angle OBC = \angle OCB$. От друга страна $\angle DOC = \angle OBC + \angle OCB$ (външен за ΔBOC). Следователно $\angle ABO = \angle ODC = \angle DOC = 2\angle ACB$. По-нататък ще използваме, че сборът от ъглите в един триъгълник е $180^{\mathbf{0}}$. За ΔABC имаме $\angle ACB = \angle BAC$, $\angle OBC = \angle BAC$ и $\angle ABO = 2\angle BAC$. Оттук $5\angle BAC = 180^0$, т.е. $\angle BAC = 36^0$. Намираме, че $\angle BCD = 2\angle BAC = 72^0$ и $\angle ABC = 3\angle BAC = 108^0$. Сега да забележим още, че ΔDBC е също равнобедрен ($BD = BC$). Но тогава $BD = AB$, откъдето и ΔABD е равнобедрен. Получаваме, че

$$\angle BAD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180^0 - \angle ABO) = \frac{1}{2}(180^0 - 72^0) = 54^0$$

и $\angle ADC = 180^0 - \angle BAD = 180^0 - 54^0 = 126^0$. Окончателно ъглите на трапеца са 54^0, 108^0, 72^0 и 126^0.

Оценяване: 3 точки да намиране на ъгъл на трапеца, от които по 1 точка за частични резултати, свързани с намирането на ъгъла ; 2 точки за намиране на ъгъл, който заедно с намерения не е прилежащ на една и съща основа (1 точка за частичен резултат, свързан с намирането на втория ъгъл); 1 точка за завършване на решението.

7.3. Десет единични квадратчета в квадратна таблица 99×99 са оцветени така, че всяка таблица $n\times n$ има точно едно оцветено квадратче. Да се намерят всички възможни стойности на n.

Решение: Ако $n \le 24$, то $4n < 99$, така че в таблицата 99×99 има 16 таблици $n\times n$ без общи квадратчета. Ако всяка от тях има оцветено квадратче, то $16 > 10$, което противоречи на условието. Заключаваме, че $n > 24$.

Ако $n \ge 33$, то $3n \ge 99$ и таблицата 99×99 може да се покрие с 9 таблици $n\times n$. Ако всяка от тях има само едно оцветено квадратче, то $9 < 10$. Отново стигаме до противоречие. Следователно $n < 33$ и получаваме, че $24 < n < 33$.

Ще покажем, че n може да е всяко от числата 25, 26, ..., 32. Нека n е някое от тези числа. Да номерираме последователно редовете 1, 2, ..., 99 и квадратчетата във всеки от тях последователно отляво надясно 1, 2, ..., 99. Нека в редове с номера n и $2n$ оцветим само квадратчета n, $2n$ и $3n$; в ред номер $3n$ оцветим само квадратчета 1, $n+1$, $2n+1$ и $3n+1$; в останалите редове не оцветяваме нищо. По този начин получаваме точно 10 оцветени квадратчета. Всяка таблица $n\times n$ има общи квадратчета само с един от редовете n, $2n$ и $3n$. При това е ясно, че таблицата съдържа точно едно от оцветените квадратчета.

Оценяване: 2 точки за оценката $24 < n < 33$ (по 1 точка за всяко от неравенствата); 5 точки за конструкция на пример със съответни обосновки (1 точка за верен пример без обосновки).

7.4. Да се намерят всички прости числа, които могат да се представят във вида

$$n^4 - 7n^3 + 3n^2 + 8n + 182$$

за подходящо естествено число n.

Решение: Да забележим, че $182 = 26.7$. Ще потърсим естествени числа a и b така, че

$$n^4 - 7n^3 + 3n^2 + 8n + 182 = (n^2 + an + 26)(n^2 + bn + 7).$$

Като разкрием скобите, извършим приведение и приравним коефициентите пред еднаквите степени на n вляво и вдясно на равенството, задачата се свежда до намиране на a и b така, че $a+b=-7$, $ab+33=3$, $7a+26b=8$. От първото и третото равенство намираме $a=-10$ и $b=3$, които удовлетворяват и второто равенство. Нека сега p е просто число, което се представя по искания начин. Тогава $(n\ \ -10n+26)(n^2+3n+7)=p$. Тъй като $n^2-10n+26<n\ \ +3n+7$ при $n\geq 2$, заключаваме, че $n^2-10n+26=1$ и $n^2+3n+7=p$. От първото равенство намираме $(n-5)^2=0$, т.е. $n=5$, а при тази стойност на n от второто равенство следва, че $p=47$. Това е единственото просто число с исканото свойство, защото при $n=1$ числото $n^4-7n^3+3n^2+8n+182$ е равно на $187=17.11$ и е съставно.

Оценяване: 5 точки за представянето $(n\ \ -10n+26)(n^2+3n+7)=p$ (по 1 точка за частични резултати , необходими за получаване на представянето); 1 точка за намиране на $p=47$;(тази точка се присъжда и в случай, че решението е отгатнато и няма други верни разсъждения, които водят до крайния резултат); 1 точка за доказване, че решението е единствено.