

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Варна, 29-31 март 2019 г.

Варна, 2019 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Дадено е уравнението $(p - 6)x^2 + 2px - p = 4$, където p е реален параметър.

а) За кои стойности на p уравнението е изпълнено само за едно реално x ?

б) За кои стойности на p уравнението има два различни реални корена x_1 и x_2 , за които

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \sqrt{\frac{27}{2}}$$

и всички участващи тук изрази са реални числа? Запишете всяка намерена стойност на p като несъкратима дроб.

Решение. а) При $p = 6$ уравнението е линейно и има единствен корен. Нека $p \neq 6$. Сега е необходимо съкратената дискриминанта $D' = p^2 + (p-6)(p+4) = 0$, т.е. $2p^2 - 2p - 24 = 0$, чиито корени са $p = 4$ и $p = -3$.

б) Необходимо е дискриминантата да е положителна, което ще проверим по-късно за намерените стойности на p . Всичко написано по-нататък е валидно при предположението, че стойностите на p са подходящи да осигурят това. От формулите на Виет

$$x_1 + x_2 = \frac{2p}{6-p} \text{ и } x_1x_2 = \frac{p+4}{6-p}.$$

Ако $p > 6$, то $6-p < 0$, $p+4 > 0$, така че x_1 и x_2 са с различни знаци и $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ не е реално число. Последното е в сила и при $p < -4$, понеже $6-p > 0$ и $p+4 < 0$. От друга страна, ако $p \in (-4; 6)$, то $6-p > 0$, $p+4 > 0$ и (при направената в началото уговорка) участващите изрази са реални. Имаме

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1x_2}}.$$

Ако $p \in (0; 6)$, то $x_1 + x_2 > 0$, така че $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и

$$\sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{2p}{6-p} : \sqrt{\frac{p+4}{6-p}} = \frac{2p}{\sqrt{(p+4)(6-p)}}.$$

Ако $p \in (-4; 0)$, то $x_1 + x_2 < 0$, така че $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и

$$\sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{-2p}{6-p} : \sqrt{\frac{p+4}{6-p}} = \frac{-2p}{\sqrt{(p+4)(6-p)}}.$$

И в двата случая получаваме

$$\frac{4p^2}{(p+4)(6-p)} = \frac{27}{2}$$

$$8p^2 = 27(p+4)(6-p)$$

$$35p^2 - 54p - 27.24 = 0.$$

Имаме $D = 54^2 + 4.35.27.24 = 18^2(3^2 + 35.8) = 18^2.17^2$, при което $p_{1,2} = \frac{54 \pm 306}{70}$ и $p_1 = \frac{36}{7}$ (тогава $x_1 > 0, x_2 > 0$); $p_2 = -\frac{18}{5}$ (тогава $x_1 < 0, x_2 < 0$).

Остава да се убедим наистина ли $D' > 0$ при намерените стойности на p . При $p = \frac{36}{7}$ имаме $D' = \frac{912}{49} > 0$. При $p = -\frac{18}{5}$ имаме $D' = \frac{228}{25} > 0$. (Не е задължително стойностите на D' да са изчислени, достатъчно е по някакъв начин да е гарантирано, че $D' > 0$.)

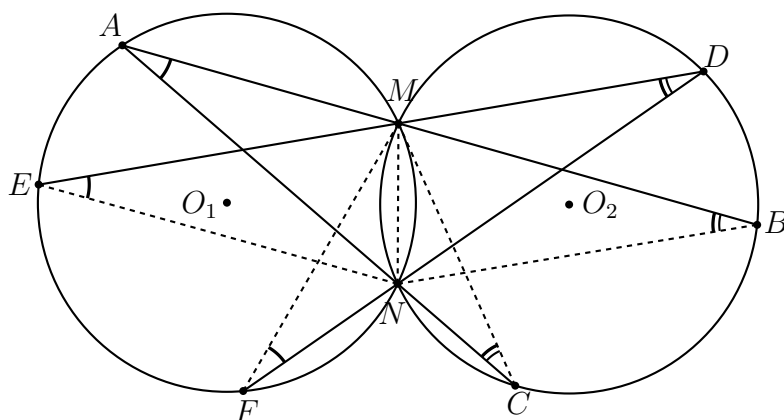
Оценяване (6 точки):

а) 2 т.: 1 т. за $p = 6$ и общо 1 т. за $p = 4$ и $p = -3$;

б) 4 т., от които 1 т. за намиране на условието $p \in (-4; 6)$; 1 т. за правилно изразяване на желаното условие чрез формулите на Виет в двата случая; 1 т. за намиране стойностите на p в несъкратим вид; 1 т. за осигуряване на $D' > 0$.

Задача 8.2. Окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките M и N . През точка $A \in k_1$, външна за k_2 , са построени правите AM и AN , които пресичат k_2 за втори път в точки B и C , така че M е между A и B , а N е между A и C . През точка D от дъгата BM на k_2 , несъдържаща N , са построени правите DM и DN , които пресичат k_1 за втори път в точките E и F , така че M е между D и E , а N е между D и F . Ако $AB = ED$ и $AC = FD$, докажете, че MN е симетрала на отсечката AD .

Решение. Имаме $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MEN = \sphericalangle MFN$ като вписани в k_1 и измерващи се с половинката от дъгата MN . Аналогично $\sphericalangle MBN = \sphericalangle MDN = \sphericalangle MCN$ и от $AB = ED$ и $AC = FD$ получаваме $\triangle ABN \cong \triangle EDN$ и $\triangle ACM \cong \triangle FDM$.



Следователно $AN = EN$ и $AM = MF$. От $AN = EN$ следва $\sphericalangle NAE = \sphericalangle NEA$. Имаме $\sphericalangle NAE = \sphericalangle EMN$ като вписани и измерващи се с половинката от дъгата EN и аналогично $\sphericalangle NEA = \sphericalangle NMB$, т.е. $\sphericalangle EMN = \sphericalangle NMB$. От $AM = FM$ следва $\sphericalangle MAF = \sphericalangle MFA$. Като вписани $\sphericalangle MFA = \sphericalangle MNA$ и $\sphericalangle MAF = \sphericalangle MND$, т.е. $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MND$.

Сега по втори признак $\triangle ANM \cong \triangle DNM$, т.е. $AN = DN$ и $AM = DM$ и MN е симетрала на отсечката AD .

Забележка. Ако означим центровете на окръжностите с O_1 и O_2 съответно, то получаваме, че $\sphericalangle MO_1N = 2\sphericalangle MAN = 2\sphericalangle MDN = \sphericalangle MO_2N$, т.е. $\triangle MO_1N \cong \triangle MO_2N$ и следователно окръжностите k_1 и k_2 са с равни радиуси.

Оценяване (6 точки): 1 т. за $\triangle ABN \cong \triangle EDN$; 1 т. за $\sphericalangle EMN = \sphericalangle NMB$; 1 т. за $\triangle ACM \cong \triangle FDM$; 1 т. за $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MND$; 2 т. за завършване.

Задача 8.3. Една или повече монети, поставени една върху друга, ще наричаме кула. Във всяко поле на дъска 5×7 отначало има кула от по една монета. На всеки ход някоя монета прескача кула, намираща се в съседно (по страна или диагонал) поле и застава на същото разстояние от другата ѝ страна (евентуално върху друга кула). След няколко хода на дъската имало k кули.

а) Намерете най-малката възможна стойност на k , ако е разрешено да се правят произволен брой ходове.

б) Намерете най-малкия брой ходове, с които може да се постигне намерената минимална стойност на k .

Решение. Да оцветим таблицата както следва:

1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1

При ходове монетите не променят цвета на полетата си, така че винаги ще има кула на поне по 1 поле от всеки цвят. Можем да постигнем $k = 4$ например като първо изпразним 20-те полета по външната рамка (като всяка монета прескача най-близката съседна от по-вътрешната рамка), после 9 от полетата на тази по-вътрешна рамка, оставяйки кули само в правоъгълник 2×3 , и накрая изпразним и десните две полета в него, оставяйки кули само в квадрат 2×2 .

Да преценим колко хода са нужни за събиране на монетите от цвят 1 в една кула. За да съберем монетите от най-лявото и най-дясното поле на даден ред са нужни общо поне 3 хода, а за останалите 6 полета от цвят 1 са нужни общо поне 5 хода, или общо поне $3 \cdot 3 + 5 = 14$ хода.

За събиране на деветте монети от цвят 2 са нужни общо поне 8 хода.

Да преценим колко хода са нужни за събиране на монетите от цвят 3 в една кула. За да съберем монетите от най-лявото и най-дясното поле на даден ред са нужни общо поне 3 хода, а за останалите 4 полета от цвят 3 са нужни общо поне 3 хода, или общо поне $2 \cdot 3 + 3 = 9$ хода.

За събиране на шестте монети от цвят 4 са нужни общо поне 5 хода.

И така, нужни са общо поне $14 + 8 + 9 + 5 = 36$ хода. Те може да са както описаните в началото. Наистина, там ходовете са 20 за полетата от външната рамка, плюс 9 за частта от втората рамка, плюс $1 + 6 = 7$ за последните две полета (в едно от тях при първата фаза се е струпала кула от 6 монети), или общо $20 + 9 + 1 + 6 = 36$ хода.

Оценяване (7 точки):

- а) 3 т., от които 2 т. за оцветяването и 1 т. за завършване;
- б) 4 т., от които по 0,5 т. за оценка на ходовете от всеки цвят и 2 т. за подходящ пример.

Задача 8.4. Да се реши в прости числа уравнението $p^2 - q^4 - r^4 - s^4 = 374$.

Решение. Нека първо считаме, че $q \geq r \geq s$. Явно $p > 2$, т.е. е нечетно. Тогава сред q, r, s трябва да има едно или три нечетни. Ако има едно, то лявата страна се дели на 4, а дясната – не: абсурд. Следователно всички числа са по-големи от 2. Да допуснем, че $s > 3$. Тогава лявата страна дава остатък 1 при деление

на 3, а дясната – остатък 2: абсурд. И така, $s = 3$. Уравнението добива вида

$$p^2 - q^4 - r^4 = 455.$$

Да допуснем, че $r > 5$. Тогава дясната страна се дели на 5, а лявата – не: абсурд. И така, $r = 5$. Уравнението добива вида $p^2 - q^4 = 1080$. Да допуснем, че $q = 5$. Тогава $p > 5$ и дясната страна се дели на 5, а лявата – не: абсурд. И така, $q > 5$. Понеже $p > q^2$, то $p \geq q^2 + 2$ и $1080 = p^2 - q^4 \geq (q^2 + 2)^2 - q^4 = 4q^2 + 4$. Оттук $q^2 \leq 1076 : 4 = 269$, т.е. $q < 17$. Остава да проверим $q = 7, 11, 13$.

При $q = 7$ имаме $p^2 = 1080 + 7^4 = 3481$, откъдето $p = 59$.

При $q = 11$ имаме $p^2 = 1080 + 11^4$, което дава остатък 6 при деление на 7, така че не е точен квадрат. Алтернативно, директно се проверява, че 15721 не е точен квадрат.

При $q = 13$ имаме $p^2 = 1080 + 13^4$, което дава остатък 3 при деление на 7, така че не е точен квадрат. Алтернативно, директно се проверява, че 29641 не е точен квадрат.

Окончателно задачата има 6 решения: $p = 59$, $\{q; r; s\} = \{3; 5; 7\}$ ($3! = 6$ възможни пермутации).

Оценяване (7 точки): 1 т. за доказване, че числата са нечетни; 1 т. за доказване, че едно от тях е равно на 3; 1 т. за доказване, че едно от тях е равно на 5; 1 т. за намиране на шестте решения на задачата; 3 т. за отхвърляне на останалите случаи (разпределени пропорционално на това каква част от проверките в рамките на намереното ограничение са направени успешно; ако няма ограничаващо големината условие, частичните проверки не носят точки).

Задача 9.1. Дадена е системата

$$\begin{cases} x - y = 1 - a \\ xy = a^2 - a - 3 \end{cases},$$

където a, x, y са реални числа. Да се намери най-малката стойност на израза $x^2 + y^2$ и стойностите на a , за които тя се достига.

Решение. Тъй като $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$, директно се получава, че $x^2 + y^2 = 3a^2 - 4a - 5$, което е квадратна функция спрямо параметъра a . Отделяйки точен квадрат, получаваме $f(a) := 3a^2 - 4a - 5 = 3(a - \frac{2}{3})^2 - \frac{19}{3}$ и знача изразът е симетричен спрямо $a = \frac{2}{3}$, където се достига глобалният минимум на функцията.

От друга страна, трябва да определим допустимото множество от стойности за a , при които системата има реални решения (x, y) и да намерим локалния минимум на $f(a)$ в това множество. От първото уравнение изразяваме, че

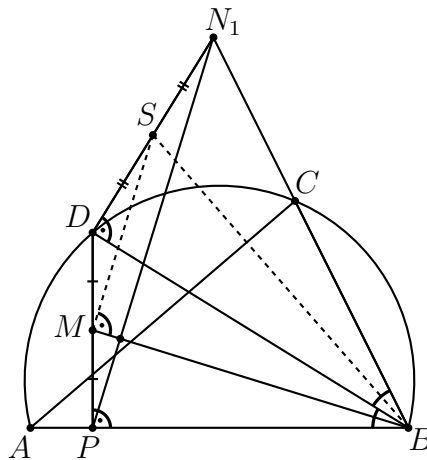
$x = 1 - a + y$ и, замествайки във второто и извършвайки необходимите преобразувания, получаваме, че квадратното уравнение $y^2 + (1 - a)y - (a^2 - a - 3) = 0$ трябва да има реален корен, което е еквивалентно на $D = 5a^2 - 6a - 11 = (5a - 11)(a + 1) \geq 0$, т.е., $a \in (-\infty, -1] \cup [\frac{11}{5}, +\infty)$.

Допустимото множество за a е симетрично относно $\frac{3}{5}$ и тъй като $\frac{2}{3} \notin (-\infty, -1] \cup [\frac{11}{5}, +\infty)$, $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, то минимумът на $f(a)$ в това множество се достига при $a = \frac{11}{5}$ и е равен на $f(\frac{11}{5}) = \frac{18}{25}$. В този случай $x = -\frac{3}{5}$, $y = \frac{3}{5}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за изразяването на $x^2 + y^2$ като функция на a ; 1 т. за намиране върха на параболата (глобалния минимум) на $f(a)$; 1 т. за изразяването на едната променлива спрямо другата в първото уравнение и достигането до квадратно параметрично уравнение с реални корени; 1 т. за пресмятането на дискриминантата му и определянето на допустимото множество от стойности за a ; 2 т. за довършване.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ и нека точка D е средата на дъгата AC от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, несъдържаща точка B . Нека точка P е проекцията на D върху правата AB , а точка M е средата на DP . Правата през M е перпендикулярна на BM , пресича правата BC в точка N . Да се докаже, че $\sphericalangle NDB = 90^\circ$.

Решение. Нека правата през D , перпендикулярна на BD пресича правата BC в точка N_1 . Ще докажем, че $PN_1 \perp BM$ откъдето ще следва, че $N \equiv N_1$. Да означим с S средата на отсечката DN_1 . От $\sphericalangle DBP = \sphericalangle N_1BD$ и $\sphericalangle DPB = \sphericalangle N_1DB = 90^\circ$ следва, че $\triangle BDP \sim \triangle BN_1D$. Тогава $\sphericalangle BMP = \sphericalangle BSD$, т.е. $SDMB$ е вписан четириъгълник и $\sphericalangle BMS = \sphericalangle BDS = 90^\circ$. Остава да съобразим, че MS е средна отсечка в $\triangle PN_1D$, т.е. $MS \parallel PN_1$ и следователно $PN_1 \perp BM$.



Оценяване. (6 точки) 1 т. за дефинирането на т. N_1 ; 1 т. за дефинирането на т. S ; 2 т. за $SDMB$ – вписан четириъгълник; 2 т. за довършване на решението.

Задача 9.3. Нека n е естествено число и $d_1 < d_2 < \dots < d_m$ са всички естествени

делители на $n! + 1$. Да се намерят всички n , за които

$$\frac{1}{d_1 + \sqrt{n! + 1}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{n! + 1}} + \cdots + \frac{1}{d_m + \sqrt{n! + 1}} = \frac{3}{142}.$$

Решение. Да означим за краткост $\sqrt{n! + 1} = x$. Имаме последователно

$$\frac{1}{d_i + x} + \frac{1}{d_{m+1-i} + x} = \frac{d_i + d_{m+1-i} + 2x}{(d_i + x)(d_{m+1-i} + x)} = \frac{d_i + d_{m+1-i} + 2x}{x(d_i + d_{m+1-i} + 2x)} = \frac{1}{x}$$

(това е вярно и при $i = m + 1 - i$; използвахме, че $d_i d_{m+1-i} = n! + 1 = x^2$). Лесно се вижда, че разглежданата сума е равна на $m/2x$ и даденото уравнение е еквивалентно на $71m = 3x$. В частност, x е цяло число, т.е. $n! + 1$ е точен квадрат. Директна проверка за $n \leq 7$ дава решението $n = 7$. Тогава $n! + 1 = 5041 = 71^2$ и $m = 3$. За $n < 7$, $n! + 1 < 5041$, така че x не е цяло или не се дели на 71.

Оттук нататък ще считаме, че $n \geq 8$, като отбелязваме, че от равенството $n! + 1 = x^2$ следва, че x няма прости делители, ненадминаващи n .

Нека $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ е каноничното разлагане на x . Тогава

$$(*) \quad 71(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_s + 1) = 3p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}.$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $p_1 = 71$. Тъй като $3 \cdot 71^{\alpha_1} > 71(2\alpha_1 + 1)$ при $\alpha_1 > 1$ и $p_i^{\alpha_i} > 2\alpha_i + 1$, $i \geq 2$, поради $p_i > 7$, дясната страна на (*) е по-голяма от лявата освен ако $s = 1$ и $\alpha_1 = 1$, което води до $n = 7$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. – за достигане до уравнението $71m = 3x$; 1 т. – за решение $n = 7$ и липса на решения $n < 7$; 2 т. – за достигане до (*); 2 т. – за довършване, че няма решения $n > 7$.

Задача 9.4. В държавата Кръгландия всичките 2019 града са разположени последователно през 1 км. върху единствения междуградски път в държавата, който има формата на окръжност и е с дължина 2019 км. Множество от 673 града ще наричаме *добро*, ако разстоянието между някои два от градовете не е нито 3 км. нито 673 км. (разстояние между два града се равнява на дължината на по-късата дъга, която отсичат от междуградския път). Да се намери броят на добрите множества от градове в Кръгландия.

Решение. Нека номерираме градовете по часовниковата стрелка с $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$ и да ги разположим циклично в таблица 3×673 , както е показано по-долу:

A_1	A_4	A_7	\dots	\dots	A_{2017}
A_{674}	A_{677}	A_{680}	\dots	\dots	A_{671}
A_{1347}	A_{1350}	A_{1353}	\dots	\dots	A_{1344}

Тъй като $3|2019$, $673|2019$ и $(3, 673) = 1$, лесно се вижда, че всеки 2 града на разстояние 3 един от друг се намират в един и същи ред, а всеки 2 града на разстояние 673 един от друг се намират в един и същи стълб на табличката. Да я оцветим по редове в бяло, зелено, червено. Едно множество от градове е добро, тогава и само тогава, когато сме избрали по един град от всеки стълб на таблицата, като градовете от всеки 2 съседни стълба са разноцветни (последният 673-ти стълб е съседен и на първия).

Да означим броя на различните такива конструкции с a_{673} . Ще докажем по индукция, че $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$ за всяко $n \geq 3$. При $n = 3$ трябва да изберем един бял, един зелен и един червен град от различни стълбове, следователно $a_3 = 3! = 6 = 2^3 - 2$. Нека сега сме доказали формулата за n и да разгледаме $n + 1$. Ако не се грижим, че $n + 1$ -вия стълб е съседен на първия, то можем да изберем $3 \cdot 2^n$ “добри” конструкции (фиксираме цвят в първата колона и после от всяка следваща избираме град в различен от предходната цвят). Когато цвета на градовете в първата и последната колона са еднакви, то ако “слеем” двете колони, получаваме “добра” конструкция за n колони, т.е., броят на тези конфигурации е a_n . Окончателно,

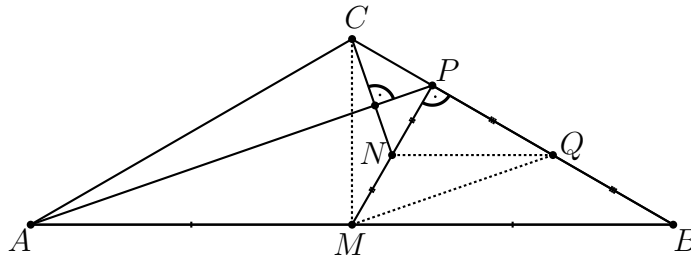
$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - a_n = 3 \cdot 2^n - 2^n - 2 \cdot (-1)^n = 2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1}.$$

С това индукцията е завършена и значи броят на добрите множества от градове в Кръгландия е $2^{673} - 2 = 2(2^{672} - 1)$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за конструирането и оцветяването на табличката 3×673 , както и преформулирането на условието за “добро” множество; 3 т. за доказване на общата формула $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$; 1 т. за отговора.

Задача 10.1. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средата на страната AB . Означаваме с P проекцията на M върху страната BC ($P \in BC$), а с N средата на MP . Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$, ако е известно, че $AP \perp CN$ и $AP : CN = 2\sqrt{3}$.

Решение. Нека означим с Q средата на отсечката BP .



Тогава MQ е средна отсечка в $\triangle ABP$, т.е. $MQ \parallel AP$, $MQ = \frac{1}{2}AP$ и от условието следва, че $MQ \perp CN$ и $MQ : CN = \sqrt{3}$. Следователно N се явява ортоцентър в $\triangle MQC$ и $NQ \perp CM$, но NQ е средна отсечка в $\triangle MBP$, т.е. $AB \parallel NQ \perp CM$ и така достигаме до извода, че $\triangle ABC$ е равнобедрен. Остава да съобразим, че $\triangle MQP \sim CNP$, т.е. $MP : CP = MQ : CN = \sqrt{3}$, т.е. $\sphericalangle MCP = 60^\circ$ и окончателно $\sphericalangle ACB = 120^\circ$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 30^\circ$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за построяване на точката Q и отчитане на факта, че $MQ \perp CN$ и $MQ : CN = \sqrt{3}$; 2 т. за $\triangle ABC$ - равнобедрен; 2 т. за довършване на решението.

Задача 10.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$a - 4^x = \sqrt{a + 2^x}$$

има решение.

Решение. Полагаме $2^x = t$, $t > 0$ и достигаме до ирационалното уравнение

$$a - t^2 = \sqrt{a + t}.$$

Преобразуваме го във вида

$$a + t - \sqrt{a + t} = t + t^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a + t} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

и следователно $\sqrt{a + t} = -t$ или $\sqrt{a + t} = t + 1$. Но $t > 0$ и задачата се свежда до намиране стойностите на параметъра a , за които уравнението $\sqrt{a + t} = t + 1$ има положително решение. Последното е еквивалентно на

$$f(t) = t^2 + t + 1 - a = 0$$

за поне една положителна стойност на t . Тъй като върхът на параболата е при $t = -\frac{1}{2} < 0$, горното е изпълнено точно когато $f(0) = 1 - a < 0$. Окончателно $a \in (1, +\infty)$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за полагането $2^x = t$, $t > 0$ и свеждане до уравнението $a - t^2 = \sqrt{a+t}$; 3 т. за свеждане до уравнението $\sqrt{a+t} = t + 1$, $t > 0$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Едно множество A от естествени числа се нарича *свободно*, ако за всеки две числа $a \in A$ и $b \in A$ (не непременно различни) числото ab не е от A . Да се намери най-малкото естествено число n , за което множеството $M = \{3, 4, 5, \dots, 3^{14} - 1\}$ може да се представи като обединение на n две по две непресичащи се *свободни* множества.

Решение. Лесно се вижда, че множеството $\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5\}$ не може да се представи като обединение на две непресичащи се *свободни* множества и следователно $n \geq 3$. Ще докажем, че $n = 3$. Едно число $x \in M$ ще наричаме *просто*, ако то не може да се представи като произведение на две или повече числа от M . Лесно се вижда, че това са числата $4, 8, p$ и $2p$, където p е просто число в обичайния смисъл. За число $x \in M$ да означим с $f(x)$ най-голямото естествено число, за което x може да се представи като произведение на $f(x)$ *прости* числа от M . Вижда се, че $f(xy) \leq f(x) + f(y) + 1$. Полагаме:

$$A = \{x \in M | f(x) = 1, 4, 10, 13\};$$

$$B = \{x \in M | f(x) = 2, 3, 11, 12\};$$

$$C = \{x \in M | f(x) = 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Понеже $f(x) \leq 13$ за $x \in M$ лесно се вижда, че множествата A , B и C дават исканото разбиване.

Оценяване: 1 т. за разглеждане на *прости* числа в M ; 1 т. за въвеждане на функцията $f(x)$; 2 т. за $f(xy) \leq f(x) + f(y) + 1$; 3 т. за вярно разбиване.

Задача 11.1. Да се реши системата:

$$\begin{cases} \lg^2 \left(\frac{x^2+x}{y} \right) = \lg^2 \left(\frac{y^2+y}{x} \right) + \lg^2(x+1)(y+1) \\ \lg(x+6) = \lg(x-y) + \lg(y+1). \end{cases}$$

Решение. Тъй като

$$\lg^2 \left(\frac{x^2 + x}{y} \right) - \lg^2 \left(\frac{y^2 + y}{x} \right) = \lg(x+1)(y+1) \lg \left(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)} \right),$$

то първото уравнение е еквивалентно на:

$$(*) \quad \lg(x+1)(y+1) \left(\lg \left(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)} \right) - \lg(x+1)(y+1) \right) = 0.$$

Ако $\lg(x+1)(y+1) = 0$, то $(x+1)(y+1) = 1$ и едното от x и y е положително, а другото е отрицателно. Поради $\frac{x^2+x}{y} > 0$ и $\frac{y^2+y}{x} > 0$ това е невъзможно.

При $\lg \left(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)} \right) = \lg(x+1)(y+1)$, получаваме $x^2 = y^2(y+1)^2$ и понеже $\frac{y(y+1)}{x} > 0$, то $x = y(y+1)$.

От второто уравнение намираме $(x-y)(y+1) = x+6$ и след заместване $x = y(y+1)$, получаваме $y^3 - y - 6 = 0$. Сега от $y^3 - y - 6 = (y-2)(y^2 + 2y + 3)$ следва, че $y = 2$ и следователно $x = 6$.

Оценяване: 2 т. за получаване на (*); 1 т. за случая $\lg(x+1)(y+1) = 0$; 1 т. за $x = y(y+1)$; 2 т. за решаване на системата и получаване на отговора.

Задача 11.2. Нека a е реален параметър. Какъв е минималният брой цели решения на неравенството:

$$\frac{2x^2 + (3a^2 + 1)x - 2a^2 + 4a - 6}{x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3} < 1?$$

Решение. Неравенството е еквивалентно на:

$$\frac{x^2 + (2a^2 - a + 4)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3} < 0$$

Нека

$$f(x) = x^2 + (2a^2 - a + 4)x - a^2 + 2a - 3 \text{ и } g(x) = x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3.$$

Понеже $f(0) = g(0) = -a^2 + 2a - 3 < 0$, то уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ имат реални корени $x_1 < 0 < x_2$ и $x'_1 < 0 < x'_2$. Сега от

$$x_1 x_2 = x'_1 x'_2 \text{ и } x'_1 + x'_2 - (x_1 + x_2) = a^2 - 2a + 7 > 0$$

лесно се вижда, че наредбата на корените е $x_1 < x'_1 < 0 < x_2 < x'_2$ и тогава решенията на неравенството са

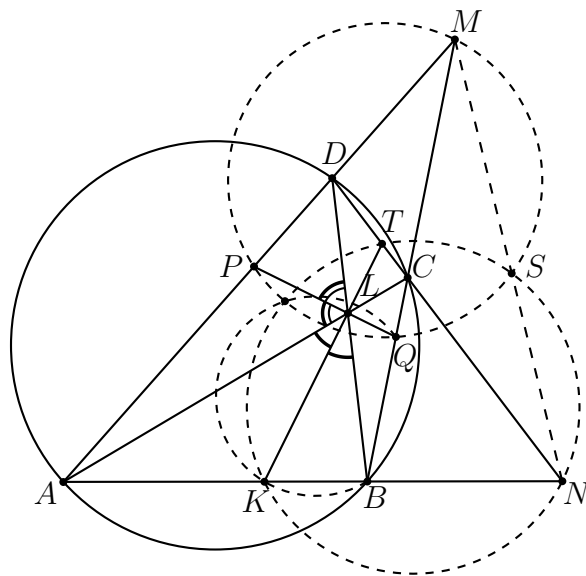
$$x \in (x_1, x'_1) \cup (x_2, x'_2).$$

Сборът от дължините на двата интервала е $a^2 - 2a + 7 = (a - 1)^2 + 6 \geq 6$. При $a = 1$ целите решения са $-5, -4, -3, -2$ и 1 , а при $a \neq 1$ сборът от дължините на двата интервала е по-голям от 6 и лесно се вижда, че те съдържат поне 5 цели числа.

Оценяване: 1 т. за доказателство, че всяко от уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ има един положителен и един отрицателен корен; 2 т. за разположението на корените $x_1 < x'_1 < 0 < x_2 < x'_2$; 1 т. за определяне на решението $x \in (x_1, x'_1) \cup (x_2, x'_2)$ на неравенството; 1 т. за намиране на $a^2 - 2a + 7 = (a - 1)^2 + 6 \geq 6$; 1 т. за получаване на отговора.

Задача 11.3. Диагоналите AC и BD на вписан четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка L . Правите AD и BC се пресичат в точка M , а правите AB и CD се пресичат в точка N . Ъглополовящата на ъгъл ALD пресича страните AD и BC съответно в точки P и Q , а ъглополовящата на ъгъл ALB пресича страните AB и CD съответно в точки K и T . Да се докаже, че описаните окръжности около $\triangle MPQ$, $\triangle NKT$ и $\triangle BKCQ$ имат обща точка.

Решение. Нека S е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$. От това, че $ABCD$ е вписан следва, че S лежи на MN .



Сега $\triangle SAD \sim \triangle SBC$ и от $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ (доказва се от свойството на ъглополовящите) следва:

$$\sphericalangle SPQ = \sphericalangle SAB = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MPQ.$$

Това означава, че описаната около $\triangle MPQ$ окръжност минава през S . Аналогично се доказва, че и описаната окръжност около $\triangle NTK$ минава през S . Сега твърдението следва от $\triangle NBM$ и точките S , K и Q върху страните му.

Оценяване: 1 т. за разглеждане на точката на Микел за $ABCD$; 1 т. за равенството $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$; 1 т. за подобие $\triangle SAD \sim \triangle SBC$; 2 т. за това, че S лежи на описаната окръжност около $\triangle MPQ$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 11.4. Виж задача 10.4.

Задача 12.1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $AC = BC$, $BD = 2AD$ и $AB = AE$, където $E = AB \cap CD$. Да се намери отношението $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC}$.

Решение. Имаме

$$\frac{\sin \sphericalangle BED}{\sin \sphericalangle BDE} = \frac{BD}{BE} = \frac{2AD}{2AE} = \frac{\sin \sphericalangle AED}{\sin \sphericalangle ADE},$$

откъдето (1) $\sphericalangle ADE = \pi - \sphericalangle BDE = \sphericalangle BDC$.

Ако D е вътрешна/външна точка за описаната около $\triangle ABC$ окръжност k , то

$$\sphericalangle ADE < \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC < \sphericalangle BDC / \sphericalangle ADE > \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC > \sphericalangle BDC.$$

Значи (2) $D \in k$ и от теоремата на Птолемей следва, че

$$(3) \quad AB \cdot CD = AC \cdot BD - AD \cdot BC = BC \cdot 2AD - AD \cdot BC = AD \cdot BC.$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за (1), 3 т. за (2) и 1 т. за (3).

Забележка. Всеки три от следните пет условия влекат останалите две: $AC = BC$, $BD = 2AD$, $AB = AE$, $D \in k$ и $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Четириъгълник, изпълняващ последните две условия, се нарича хармоничен.

Второ решение. (Стефан Герджиков) Нека $BE = 2 \cdot AB = 2a$, $BC = AC = b$, $CD = d$ и $2 \cdot AD = BD = 2c$, $DE = x$. От Теоремата на Стюарт за $\triangle BCE$ и отсечката BD и за $\triangle EAC$ и отсечката AD имаме

$$(x+d)(2c)^2 = d(2a)^2 + xb^2 - xd(x+d)$$

$$(x+d)c^2 = da^2 + xb^2 - xd(x+d).$$

Изваждаме от първото уравнение второто и също четири пъти второто. Получаваме

$$3(x+d)c^2 = 3da^2 \iff (x+d)c^2 = da^2$$

$$3xb^2 - 3xd(x+d) = 0 \iff b^2 = d(x+d),$$

защото $x \neq 0$. Умножаваме десните две равенства:

$$(x+d)c^2b^2 = d^2a^2(x+d) \iff c^2b^2 = d^2a^2.$$

Тъй като $a, b, c, d > 0$, получаваме $\frac{ad}{bc} = 1$.

Задача 12.2. Да се намерят всички естествени числа n и всички реални числа α за които следният израз не зависи от x :

$$\sin^n(x-\alpha) \cdot \sin^n x + \sin^n x \cdot \sin^n(x+\alpha) + \sin^n(x+\alpha) \cdot \sin^n(x-\alpha).$$

Решение. Да означим дадения израз с $f_n(x, \alpha)$. Нека първо n е нечетно число. Понеже $f_n(x, \alpha) = f_n(x, -\alpha) = f_n(x, \alpha + 2\pi)$, можем да считаме, че $\alpha \in [0, \pi]$. Имаме, че

$$-\sin^{2n} \alpha = f_n(0, \alpha) = f_n(\alpha, \alpha) = \sin^n \alpha \cdot \sin^n 2\alpha = \sin^{2n} \alpha \cdot (2 \cos \alpha)^n,$$

откъдето $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ или $\alpha = 2\pi/3$. Изразите $f_n(x, 0) = 3 \sin^{2n} x$ и $f_n(x, \pi) = -\sin^{2n} x$ не са константи. По-нататък,

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^n = f_n(0, 2\pi/3) = f_n(\pi/2, 2\pi/3) = -\frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n},$$

т.е. $a_n := (3/2)^n + (1/2)^n = 2$ и значи $n = 1$ ($a_n > 2$ при $n > 1$). Обратно,

$$(1) \quad f_1(x, 2\pi/3) = 2 \sin^2 x \cos(2\pi/3) + \frac{\cos(2\pi/3) - \cos 2x}{2}$$

$$= -\sin^2 x - \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Нека сега n е четно число. Понеже $f_n(x, \alpha) = f_n(x, -\alpha) = f_n(x, \alpha + \pi)$, можем да считаме, че $\alpha \in [0, \pi/2]$. Както по-горе, от $f_n(0, \alpha) = f_n(\alpha, \alpha)$ следва, че $\alpha = 0$, или $\alpha = \pi/3$. Изразът $f_n(x, 0) = 3 \sin^{2n} x$ не е константа. По-нататък,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = f_n(0, \pi/3) = f_n(\pi/2, \pi/3) = \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n},$$

т.е. $b_n := (3/2)^n - (1/2)^n = 2$ и значи $n = 2$ ($b_n > 2$ при $n > 2$). Обратно,

$$\begin{aligned} (2) \quad 4f_2(x, \pi/3) &= (1 - \cos(2x - 2\pi/3))(1 - \cos 2x) + (1 - \cos 2x)(1 - \cos(2x + 2\pi/3)) \\ &\quad + (1 - \cos(2x + 2\pi/3))(1 - \cos(2x - 2\pi/3)) \\ &= 3 - 2(\cos(2x - 2\pi/3) + \cos 2x + \cos(2x - 2\pi/3)) \\ &\quad + \cos(2x - 2\pi/3) \cdot \cos 2x + \cos 2x \cdot \cos(2x + 2\pi/3) + \cos(2x + 2\pi/3) \cdot \cos(2x + 2\pi/3) \\ &= 3 - 2(2 \cos x \cdot \cos 2\pi/3 + 2 \cos x) + 2 \cos^2 x \cos 2\pi/3 + \frac{\cos 4x + \cos 4\pi/3}{2} \\ &= 3 - \cos^2 x + \frac{\cos 4x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

И така, отговорът на задачата е $n = 1$, $\alpha = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ и $n = 2$, $\alpha = \pm\pi/3 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Оценяване. (6 точки) По 1,5 т. за намиране на n и α при нечетно/четно n , 1 т. за (1) и 2 т. за (2).

Второ решение. (*Стефан Герджиков*) Нека $f(x)$ е дадената функция с параметри α и n ; $f(x)$ е константа точно когато $f'(x) = 0$. Непосредствено пресмятаме, че за фиксирано $n \in \mathbb{N}$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\sin^n(x - \beta) \sin^n(x - \gamma))' &= n \sin^{n-1}(x - \beta) \sin^{n-1}(x - \gamma) \cdot \\ &\quad (\cos(x - \beta) \sin(x - \gamma) + \sin(x - \beta) \cos(x - \gamma)) \\ &= n \sin^{n-1}(x - \beta) \sin^{n-1}(x - \gamma) \sin(2x - \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Следователно:

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \left((\sin x \sin(x - \alpha))^{n-1} \sin(2x - \alpha) + \right. \\ &\quad \left. (\sin x \sin(x + \alpha))^{n-1} \sin(2x + \alpha) + \right. \\ &\quad \left. (\sin(x - \alpha) \sin(x + \alpha))^{n-1} \sin 2x \right). \end{aligned}$$

Първо да разгледаме случая $n > 1$. Тогава:

$$f'(x) = ng(x) \sin x,$$

където:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin^{n-2} x \sin^{n-1}(x - \alpha) \sin(2x - \alpha) + \\ &\quad \sin^{n-2} x \sin^{n-1}(x + \alpha) \sin(2x + \alpha) + \\ &\quad 2(\sin(x - \alpha) \sin(x + \alpha))^{n-1} \cos x. \end{aligned}$$

Тъй като $f'(x) = 0$ за всяко x , то $g(x) = 0$ за $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и от това, че $g(x)$ е непрекъсната получаваме, че $g(x) = 0$. Сега при $n > 2$ от $g(0) = 0$ заключаваме, че $\sin(-\alpha) \sin \alpha = 0$, откъдето $\alpha = k\pi$. При тези стойности на α обаче $\sin(x - \alpha) = \sin(x + \alpha) = (-1)^k \sin x$. Оттук с директно заместване в дефиницията на $f(x)$ получаваме

$$f(x) = (-1)^{kn} \sin^{2n} x + (-1)^{kn} \sin^{2n} x + \sin^{2n} x = (2(-1)^{kn} + 1) \sin^{2n} x,$$

което не е константа ($f(0) = 0 \neq 1 = |f(\pi/2)|$).

Нека сега $n = 2$. Сега тъй като $g(\alpha) = 0$ то $\sin 2\alpha \sin 3\alpha = 0$, откъдето $\sin 2\alpha = 0$ или $\sin 3\alpha = 0$. Но ако $\sin 2\alpha = 0$, то от $g(\alpha/2) = 0$ получаваме

$$\sin \frac{3}{2}\alpha \sin 2\alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \alpha/2 = 0.$$

Първото събираемо е 0, а второто е равно на $-\frac{1}{2} \sin \alpha \sin \frac{3\alpha}{2}$. Тъй като $\sin \alpha \neq 0$, то получаваме, че $\sin \frac{3\alpha}{2} = 0$ и следователно при всяко положение $\sin 3\alpha = 0$. Поради $\sin \alpha \neq 0$ имаме, че $\alpha = k\pi \pm \pi/3$, тоест $\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$ и $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$. Замествайки в $f(x)$ при $n = 2$ и $\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$ получаваме:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x (\sin^2(x - \alpha) + \sin^2(x + \alpha)) + \sin^2(x - \alpha) \sin^2(x + \alpha) \\ &= \sin^2 x (2 \sin^2 x \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 x \sin^2 \alpha) + (\sin^2 x - \sin^2 \alpha)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^4 x + \frac{3}{2} \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x - 2 \sin^2 x \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ &= \frac{3}{2} \sin^2 x - 2 \frac{3}{4} \sin^2 x + \sin^4 \alpha \\ &= \sin^4 \alpha = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

Следователно при $n = 2$ решенията са $\alpha = k\pi \pm \pi/3$.

Накрая при $n = 1$ $f'(x) = \sin(2x - \alpha) + \sin(2x + \alpha) + \sin 2x$, откъдето пресмятаме, че:

$$0 = f'(x) = 2 \sin 2x \cos \alpha + \sin 2x \text{ за всяко } x \in \mathbb{R}.$$

Следователно $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. Следователно $\alpha = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi$.

Задача 12.3. За дадено нечетно число $n \geq 3$ да се намери най-малкото реално число m_n със следното свойство: всеки n положителни реални числа със сума 1 могат да се разположат по окръжност така, че произведението на всеки две съседни числа да не надминава m_n .

Решение. Ще докажем, че ако $n = 2k + 1$, то

$$m_n = M_n := \max \left\{ \frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{4(2k-1)} \right\},$$

т.е. $m_n = \frac{1}{(k+1)^2}$ при $k \leq 5$ и $m_n = \frac{1}{4(2k-1)}$ при $k \geq 6$.

Полагайки (1) $a_1 = \dots = a_{k+1} = \frac{1}{k+1} - k\varepsilon$, $a_{k+2} = \dots = a_{2k+1} = (k+1)\varepsilon$ и (2) $a_1 = \frac{1}{2} - \varepsilon$, $a_{2k+1} = \varepsilon$, $a_2 = \dots = a_{2k} = \frac{1}{2(2k-1)}$, при $\varepsilon \rightarrow 0+$ следва, че $m_n \geq M_n$.

Нека сега $a_1 \geq \dots \geq a_{2k+1} > 0$ са реални числа със сума 1. Разполагаме ги по окръжност в следния ред: (3) $a_1, a_{2k}, a_3, a_{2k-2}, \dots, a_{2k-1}, a_2, a_{2k+1}$. При $1 \leq l \leq k-1$ имаме, че

$$\begin{aligned} 1 &\geq a_1 + \dots + a_l + a_{l+1} + \dots + a_{2k+1-l} + a_{2k+1} > la_l + (2k+1-2l)a_{2k+1-l} \\ &\geq 2\sqrt{l(2k+1-2l)a_la_{2k+1-l}} \geq 2\sqrt{1(2k+1-2)a_la_{2k+1-l}}, \end{aligned}$$

откъдето

$$(4) \quad a_la_{2k+1-l} < \frac{1}{4(2k-1)}.$$

Освен това,

$$1 > ka_k + a_{k+1} \geq (k+1)a_{k+1}$$

и значи

$$(5) \quad a_ka_{k+1} < \frac{1-a_{k+1}}{k}a_{k+1} \leq \frac{1-\frac{1}{k+1}}{k} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Следователно $m_n \leq M_n$, с което задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) По 1 т. за (1), (2) и (3), и по 2 т. за (4) и (5).

Задача 12.4. В една държава има $n \geq 1$ града, някои от които са свързани с двупосочни шосета. Броят на всички шосета е $2019n$ и всяко от тях има дължина, която е естествено число.

Област с център град A ще наричаме двойка (V, R) от градове и шосета в държавата, за които:

1. използвайки шосетата само от R може да се стигне от всеки град от V до всеки друг от V ;
2. общата дължина на шосетата от R е възможно най-малка, така че 1 да е в сила.
3. броят на шосета извън R , които свързват A с V е положително число кратно на 101;

Да се докаже, че има области (V_1, R_1) и (V_2, R_2) с общ център A , така че $R_1 \subsetneq R_2$ и разликата на сумарните дължини на шосетата в R_1 и R_2 се дели на 9.

Решение. Нека $G_1 = (V_1, E_1)$ е граф с върхове градовете и ребра – шосетата в държавата. Тогава знаем, че $|E_1| = 2019|V_1|$. Следователно G_1 има свързана компонента $G = (V, E)$ с $|E| \geq 2019|V|$.

За множество от шосета R с $s(R)$ ще бележим общата дължина на шосетата от R . Нека $E_0 \subseteq E$ има свойството, че от всеки град във V има път до всеки друг, използващ само шосета от E_0 , като $s(E_0)$ е възможно най-малко. Тогава в графа (V, E_0) няма цикли, защото иначе може да махнем шосе e от E_0 като градовете V останат свързани с шосетата от $E_0 \setminus \{e\}$, но $s(E_0 \setminus \{e\}) < s(E_0)$. Следователно (V, E_0) е дърво.

Нека (V', E'_0) е произволно поддърво на (V, E_0) , тоест $V' \subseteq V_0$, $E'_0 \subseteq E_0$ свързва точно градове от V' и между всеки два града от V' има (единствен) път, който използва само шосета от E'_0 . Да допуснем, че има множество от шосета E'' с обща дължина $s(E'') < s(E'_0)$, чрез които от всеки град на V' може да стигнем до всеки друг от V' . Ще докажем, че това не е възможно.

Нека V'' са градовете, които са краища на шосе от E'' . Може да предположим, че от всеки град от V'' може да се стигне до град от V' само по шосета от E'' . Иначе може да махнем шосета от E'' , като при това единствено ще намалим общата дължина на шосетата в E'' . Нека (V'', E''_0) е поддървото на (V, E_0) с градове V'' . Тогава е ясно, че ако заменим шосетата от E''_0 с тези от E'' отново от всеки град от V ще може да се стигне до всеки друг като сумата от дължините на всички пътища ще бъде $s(E_0 \setminus E''_0 \cup E'') = s(E_0) - s(E''_0) + s(E'')$. Сега тъй като $s(E'') < s(E'_0)$ и $s(E''_0) \leq s(E'_0)$, защото всяко шосе има неотрицателна

дължина и $E'_0 \subseteq E''_0$, то $s(E_0 \setminus E''_0 \cup E'') < s(E_0)$. Това противоречи с избора на множеството от посета E_0 . Това показва, че всяко поддърво (V', E'_0) на (V, E_0) удовлетворява условие 1 от дефиницията за област.

Сега на върховете от V ще раздадем етикети по следния начин. Да фиксираме един град $v \in V$ и да номерираме посетата от E_0 по произволен начин с числа $1, \dots, |E_0|$. За всеки град $u \in V$ има единствена редица от неповтарящи се посета, които водят от v до u . Нека $\lambda(u)$ е редицата от номерата на тези посета. В частност $\lambda(v) = ()$ е празната редица.

Общият брой посета в E е поне $2019|V|$, следователно $|E \setminus E_0| \geq 2019|V| - |V| + 1 = 2018|V| + 1$. Това означава, че поне един от градовете във V е край на поне $\frac{2018}{2} + 1 = 1010$ посета, които не са от E_0 . Нека A е такъв град. Нека $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ са съседните градове на A , до които може да стигнем с посета от $E \setminus E_0$. Без ограничение на общността може да предполагаме, че $\lambda(v_1), \lambda(v_2), \dots, \lambda(v_m)$ са подредени в лексикографски нарастващ ред.

За всяко k нека $u'_k \in V$ е градът с етикет $\lambda(u'_k)$, който е най-дългият общ префикс на $\lambda(v_1), \dots, \lambda(v_{101k})$. Полагаме V'_k да са всички градове C с етикет $\lambda(C)$, който има префикс $\lambda(u_k)$ и самият той е префикс на някой от етикетите $\lambda(v_j)$ за $j \leq 101k$. Нека $R'_k \subseteq E_0$ е множеството от посета, всяко от които свързва точно два града от V'_k . Да забележим, че има най-много едно шосе $(A, v) \in E_0 \setminus R'_k$, за което $v \in V'_k$. Наистина, ако $(A, v) \in E_0$ то $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v)$ или $\lambda(v)$ е префикс на $\lambda(A)$ като $|\lambda(A)| - |\lambda(v)| = 1$. Ако $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v)$ и $\lambda(u)$ е префикс на A , то $A \in V'_k$ и следователно $(A, v) \in R'_k$. Следователно, $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(u)$ и тогава други шосета $(A, v') \in E_0$ с $v' \in V'_k$ няма. Ако $\lambda(v)$ е префикс на $\lambda(A)$, то отново няма друг град $v' \in V'_k$ със свойството, че $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v')$, защото иначе, $\lambda(A) \in V'_k$.

Сега дефинираме $V_k = V'_k$, $R_k = R'_k$ и $u_k = u'_k$, ако няма шосета $(A, v) \in E_0 \setminus R'_k$ с $v \in V'_k$. Иначе, нека (A, v) е единственото такова шосе. Тогава е ясно, че $A \notin V'_k$ и полагаме $V_k = V'_k \cup \{A\}$, $R_k = R'_k \cup \{(A, v)\}$ и $u_k = A$, ако $v = u_k$ и $u_k = A$, иначе.

Във всички случаи $|R_k| = |V_k| - 1$, откъдето (V_k, R_k) е поддърво на (V, E_0) и от по-горе удовлетворява условията 1 и 2 за област. Накрая посетата (A, v) , за които $v \in V_k$ са точно посетата $(A, v_1), (A, v_2), \dots, (A, v_{101k})$. Следователно (V_k, R_k) е област с център A . Тъй като $m \geq 1010$ има поне 10 области (V_k, R_k) при $k = 1, 2, \dots, 10$. Тогава, ако s_k е сумата от дължините на посетата в R_k то има поне две $1 \leq i < j \leq 10$, за които $s_j \equiv s_i \pmod{9}$. Това показва, че $s_j - s_i$ се дели на 9, а по конструкция $R_i \subsetneq R_j$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за въвеждане на (V, E_0) и доказателство, че е дърво; 1 т. за доказателство, че всяко поддърво (V', E') удовлетворява условия 1 и 2 от дефиницията на област; 1 т. за наблюдението, че има град с поне 1010 съседа във V по шосета, които не са в E_0 ; 1 т. за въвеждане на лексикографска наредба на върховете във (V, E_0) ; 2 т. за конструкцията на областите R_k ; 1 т. за довършване.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2 – Емил Стоянов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.4, 11.2, 11.3 – Александър Иванов; 9.3 (10.3) – Петър Бойваленков; 10.1, 10.2 – Стоян Боев; 10.4 (11.4) – Александър Иванов и Емил Колев; 11.1 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов; 12.4 – Стефан Герджиков.