Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни Математически Състезания

Стара Загора, 2021 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Дадено е уравнението $x^4 + x^3 + x + 1 = 10x^2$.

а) Докажете, че уравнението има 4 различни реални корена.

б) Нека корените на уравнението са $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Съставете уравнение от вида $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ с корени $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, $y_3 = x_3^3$ и $y_4 = x_4^3$.

Решение. а) Уравнението е еквивалентно на

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x^3 - 12x^2 + 4x + x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3x + 1) + 4x(x^2 - 3x + 1) + x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(x^2 + 4x + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0.$$

Дискриминантите на $x^2+4x+1 = 0$ и $x^2-3x+1 = 0$ са положителни, така че тези уравнения имат по два реални корена. От формулите на Виет следва, че корените на първото са отрицателни, а на второто са положителни, така че четирите корена са различни.

б) Според горното $x_{1,2}$ са корените на $x^2 + 4x + 1 = 0$, като $x_1 + x_2 = -4$ и $x_1x_2 = 1$. Тогава

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 16, x_1^2 + x_2^2 = 14 \text{ и } x_1^2x_2^2 = 1,$$

така че уравнението $y^2 - 14y + 1 = 0$ има корени x_1^2 и x_2^2.
Корените на $x^2 - 3x + 1 = 0$ са $x_{3,4}$, като $x_3 + x_4 = 3$ и $x_3x_4 = 1$. Тогава

$$x_3^3 + 3x_3x_4(x_3 + x_4) + x_4^3 = 27, x_3^3 + x_4^3 = 18 \text{ и } x_3^3x_4^3 = 1,$$

така че уравнението $y^2 - 18y + 1 = 0$ има корени x_3^3 и x_4^3.
Разкривайки скобите в $(y^2 - 14y + 1)(y^2 - 18y + 1) = 0$, получаваме уравнение, отговарящо на изискванията: $y^4 - 32y^3 + 254y^2 - 32y + 1 = 0$.

Критерии за оценяване: (6 точки) а) 1 т. за разлагане на квадратни тричлени; 1 т. за доказване, че всяко от уравненията има по два реални корена; 1 т. за доказване, че четирите корена са различни; б) 1 т. за съставяне на уравнение с корени x_1^2 и x_2^2; 1 т. за съставяне на уравнение с корени x_3^3 и x_4^3; 1 т. за завършване.

Задача 8.2. В окръжност с център O диаметърът AB пресича хордата CD в средата и M. Ако $OM = MB + BC$, то намерете мярката на дъгата $\overset{\frown}{AC}$.

Решение. От $MC < MB + BC = OM < OB$ следва, че BC не е диаметър. Сега условието гарантира, че $AB \perp CD$. Явно $OC > OM > BC$, така че $\measuredangle ABC > \measuredangle OBC > \measuredangle BAC$ като външен, значи M е между O и B. Нека точка N е такава, че M е среда на BN; тогава $ON = OM - MB = BC$. Триъгълниците NMC и BMC са еднакви по първи признак, така че $NC = BC = ON$. Ако мярката на ъгъл BAC е x, то $\measuredangle ACO = x$, $\measuredangle NCO = \measuredangle BOC = 2x$, $\measuredangle ABC = \measuredangle BNC = 4x$ като външен. Сега $4x + x = 90^\circ$ и $x = 18^\circ$. Тогава

$$\overset{\frown}{AC} = 2\measuredangle ABC = 8x = 144^\circ.$$

Критерии за оценяване: (6 точки) 1 т. за пълна аргументация защо $AB \perp CD$; 1 т. за $\triangle NMC \cong \triangle BMC$; 3 т. за доказване, че $x = 18^\circ$; 1 т. за завършване.

Задача 8.3. Намерете всички естествени n, за които числото $11^n + 39n + 828$ е точен квадрат.

Решение. При $n = 4k + 1$ по модул 4 получаваме $3 + 3 + 0 \equiv 2$, което е недопустимо за точен квадрат. При $n = 4k + 2$ по модул 4 получаваме $1 + 2 + 0 \equiv 3$, което е недопустимо за точен квадрат. При $n = 4k + 3$ по модул 3 получаваме $2 + 0 + 0 \equiv 2$, което е недопустимо за точен квадрат. При $n = 4$ получаваме числото $14641 + 156 + 828 = 15625 = 125^2$. При $n = 4k$ за $k = 2, 3, ...$ ще се уверим, че

$$(11^{2k})^2 < 11^{4k} + 39.4k + 828 < (11^{2k} + 1)^2,$$

т.е. числото е между два поредни точни квадрата, така че не може да е точен квадрат. Първото неравенство е очевидно. Второто е еквивалентно с $156k + 828 < 2.11^{2k} + 1$, което ще докажем по индукция. При $k = 2$ получаваме $1140 < 29283$. Ако сме доказали желаното за дадено k, то

$$2.11^{2k+2} + 1 = 121(11^{2k} + 1) - 120 > 121(156k + 828) - 120 > 156(k + 1) + 828,$$

което завършва индукционната стъпка.
И така, единственото решение е $n = 4$.

Критерии за оценяване: (7 точки) по 1 т. за отхвърляне $n = 4k+1$, $n = 4k+2$ и $n = 4k+3$; 1 т. за намиране на $n = 4$; 3 т. за отхвърляне $n = 4k$ при $k > 1$.

Задача 8.4. Всяко от полетата на таблица 3×4 трябва да се оцвети в един от шест възможни цвята, така че полетата с обща страна или връх да са разноцветни. По колко начина може да стане това?

Решение. Нека означим полетата по ред 1 с a, b, c, d, по ред 2 с e, f, g, h, по ред 3 с j, k, m, n, Нека z е броят ползвани цветове в полетата b, c, k, m.
Ако $z = 2$ и $b = k$, $c = m$, то за цветовете им има $6.5 = 30$ избора, а за f, e, g, h (избирани в този ред) има $4.4.3.4 = 192$ избора, общо $30.192 = 5760$ варианта.
Ако $z = 2$ и $b = m$, $c = k$, то за цветовете им има $6.5 = 30$ избора, а за f, e, g, h има $4.3.3.3 = 108$ избора, общо $30.108 = 3240$ варианта.
Ако $z = 3$ и $b = k$ или $c = m$, то за цветовете им има $6.5.4 = 120$ избора, а f, e, g, h има $3.4.2.3 = 72$ избора, общо $2.120.72 = 17280$ варианта.
Ако $z = 3$ и $b = m$ или $c = k$, то за цветовете им има $6.5.4 = 120$ избора, а за f, e, g, h има $3.3.2.3 = 54$ избора, общо $2.120.54 = 12960$ варианта.
Ако $z = 4$, то за цветовете им има $6.5.4.3 = 360$ избора, а за f, e, g, h има $2.3.1.3 = 18$ избора, общо $360.18 = 6480$ варианта.
Така за полетата b, c, e, f, g, h, k, m вариантите са $5760 + 3240 + 17280 + 12960 + 6480 = 45720$.
Във всички случаи за цвета на всяко от полетата a, d, j, n има по 3 избора. Отговорът на задачата е: $45720.3^4 = 3703320$.

Критерии за оценяване: (7 точки) По 1 т. всеки от петте случая и 2 т. за завършване.

Задача 9.1. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност има център точката I и допира страните AC и BC съответно в точките M и N. Ъглополовящите на ъглите $\measuredangle CAB$ и $\measuredangle ABC$ пресичат правата MN съответно в точките P и Q. Да се докаже, че четириъгълника $ABPQ$ е вписан.

Решение. Първи начин. Ще докажем, че точките P и Q лежат на окръжността с диаметър AB. За целта е достатъчно да покажем, че $\measuredangle APB = 90^\circ$ (другото твърдение е абсолютно аналогично). Нека $AI \cap BC = L$. Имаме, че

$$\measuredangle LAC = \measuredangle BAL; \qquad \measuredangle AMP = 180^\circ - \measuredangle CMN = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \measuredangle AIB.$$

Следователно, по първи признак за подобност, $\triangle APM \sim \triangle ABI$ и значи

$$\frac{MP}{IB} = \frac{PA}{BA} = \frac{MA}{IA} \quad \Rightarrow \quad \frac{MA}{PA} = \frac{IA}{BA}.$$

Оттук $\triangle AMI \sim \triangle APB$. Но $\triangle AMI$ е правоъгълен, следователно и подобният му $\triangle APB$ също е правоъгълен, т.е., $\measuredangle APB = 90^\circ$. Аналогично за $\measuredangle AQB = 90^\circ$.

Втори начин. Разглеждаме случая когато точка N е между точките M и P (другият случай е аналогичен). Тъй като $\measuredangle BIP = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\measuredangle BNP = \measuredangle MNC = \dfrac{180^\circ - \gamma}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, то четириъгълникът $IBPN$ е вписан. Тогава $\measuredangle IPB = \measuredangle INB = 90^\circ$. Аналогично $\measuredangle IQA = 90^\circ$, което означава, че $ABPQ$ е вписан.

Критерии за оценяване: (6 точки) - 1 т. за работеща идея (подобни триъгълници, въртяща хомотетия и др.); по 2 т. за $\triangle APM \sim \triangle ABI$ и $\triangle AMI \sim \triangle APB$; 1 т. за довършване.

Задача 9.2. Да се намерят всички цели числа z, за които трите коефициента $\{a, b, c\}$ на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и двата му корена $\{x_1, x_2\}$ са две по две различни числа, формиращи множеството $\{z-4, z-3, z-2, z-1, z\}$.

Решение. Първи начин. Да означим $S := \{z-4, z-3, z-2, z-1, z\}$. Нека първо разгледаме случая $0 \in S$. Ако $a = 0$, то уравнението не може да има два различни реални корена, което противоречи на условието. Ако $c = 0$, то и единия от корените на уравнението x_1 също ще е 0, което е противоречие с $c \neq x_1$. Аналогично, ако един от корените е нула, то c също трябва да е нула и отново стигаме до противоречие. Следователно, единствената възможност е $b = 0$. Тогава $ax^2 = -c$ и значи a и c са с различни знаци, както и $x_1 = -x_2$. Следователно $z = 2$, $x_1 = -x_2$ и $a = -c$. Директна проверка показва, че уравнението $2x^2 - 2 = 0$ има корени ± 1, което удовлетворява условието. Следователно, $z = 2$ е решение. Нека сега $0 \notin S$. Тогава или всички числа в S са положителни, или всички са отрицателни. Но от формулите на Виет имаме, че $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, следователно поне едно от четирите числа трябва да е отрицателно – остава да разгледаме случая $z < 0$. За да имаме два различни реални корена дискриминантата на уравнението $D = b^2 - 4ac$ трябва да е строго положителна. Тъй, като $\{a, b, c\} \subset S$, то $|b| \leq -z + 4$ а $ac \geq z(z-1)$. Оттук

$$(z-4)^2 \geq b^2 > 4ac \geq 4z(z-1) \;\Leftrightarrow\; 3z^2 + 4z - 16 < 0 \;\Leftrightarrow\; z \in \left(\frac{-2-2\sqrt{13}}{3}, \frac{-2+2\sqrt{13}}{3} \right).$$

Комбинирайки с изискването $z \in \mathbb{Z}_{<0}$ и използвайки оценките $\frac{-2-2\sqrt{13}}{3} > -\frac{10}{3}$, $\frac{-2+2\sqrt{13}}{3} > 0$, заключаваме, че остава да разгледаме единствено случаите $z \in \{-3, -2, -1\}$. От формулите на Виет, имаме че

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

и, тъй като x_1 и x_2 са различни цели отрицателни числа, числото c/a е съставно, не по-малко от $|x_{1,2}|$.

1 сл. $z = -1$. Тогава $S = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ и $c/a \leq 5$. Следователно $x_1 x_2 < 6$ и значи със сигурност единия корен, б.о.о. x_1, трябва да е -1. Тогава $a \leq -2$ и $c/a \leq 5/2$, т.е., $x_2 = 2$. Но тогава $a \leq -3$ и $c/a \leq 5/3 < 2$ – противоречие. Следователно, този случай не води до решение.

2 сл. $z = -2$ и $S = \{-6, -5, -4, -3, -2\}$. Тогава $c/a \leq 3$, но $x_1 x_2 \geq (-2) \cdot (-3) = 6$ – противоречие.

3 сл. $z = -3$ и $S = \{-7, -6, -5, -4, -3\}$. Аналогично на 2 сл., $7/3 \geq c/a = x_1 x_2 \geq (-3) \cdot (-4) = 12$ – противоречие.

Окончателно, единственото решение на задачата е $z = 2$.

Втори начин. Ако $a = 0$, то квадратното уравнение няма два корена, противоречие. При $a \neq 0$ имаме $a x_1 x_2 = c$, което означава, че ако някое от числата е 0, то $b = 0$. Тогава $x_1 + x_2 = 0$ и $x_{1/2} = \pm 1$ или $x_{1/2} = \pm 2$, като вторият случай е невъзможен, защото тогава $|c| \geq 4$. При $x_{1/2} = \pm 1$ получаваме уравнението $ax^2 - a = 0$, откъдето $a = 2$ и $c = -2$.

Ако между дадените числа няма нули, от $a(x_1 + x_2) = -b$ следва, че не всички числа са положителни и значи всички са отрицателни.

Тъй като a дели b и c, то a дели $b - a$ и $c - a$. Понеже $|b - a|, |c - a| \in \{1, 2, 3, 4\}$, то a дели две от числата $\{1, 2, 3, 4\}$. Следователно $a = -1$ или $a = -2$ и числата са $-5, -4, -3, -2, -1$ или $-6, -5, -4, -3, -2$. И в двата случая няма число равно на произведение на три от останалите, т.е. $a x_1 x_2 = c$ няма решение.

Критерии за оценяване: (6 точки) 2 т. за случая $z \geq 0$; 2 т. за оценката $z \in \{-3, -2, -1\}$ при $z < 0$; 1 т. за разглеждане на случая $z = -1$ и 1 т. за довършване.

Задача 9.3. Да се пресметне сумата

$$\left[\frac{1^3+1}{101}\right] + \left[\frac{2^3+2}{101}\right] + \left[\frac{3^3+3}{101}\right] + \cdots + \left[\frac{100^3+100}{101}\right].$$

С $[x]$ сме означили най-голямото цяло число, не надвишаващо x.

Решение. Ще покажем, че търсената сума е 252501. За целта ще решаваме по-общата задача:

$$A_p := \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{k^3+k}{p}\right] = ?$$

където p е нечетно просто число. Имаме, че

$$2A_p = \sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{k^3+k}{p}\right] + \sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{(p-k)^3+(p-k)}{p}\right] = \sum_{k=1}^{p-1}\left(\left[\frac{k^3+k}{p}\right] + \left[\frac{(p-k)^3+(p-k)}{p}\right]\right).$$

Тъй като

$$\frac{k^3+k}{p} + \frac{(p-k)^3+(p-k)}{p} = \frac{p^3-3p^2k+3pk^2+p}{p} = p^2-3pk+3k^2+1 \qquad (1)$$

е цяло число за всяко k, получаваме че

$$\left[\frac{k^3+k}{p}\right] + \left[\frac{(p-k)^3+(p-k)}{p}\right] = \begin{cases} \frac{k^3}{p} + \frac{(p-k)^3}{p} & ,p \nmid (k^3+k); \\ \frac{k^3}{p} + \frac{(p-k)^3}{p} + 1 & ,p \mid (k^3+k). \end{cases}$$

От

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{k^3}{p} = \sum_{k=p-1}^{1}\frac{(p-k)^3}{p} = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{(p-k)^3}{p},$$

и $p \mid (k^3+k) \;\Leftrightarrow\; p \mid (k^2+1)$, заключаваме, че

$$2A_p = 2\sum_{k=1}^{p-1}\frac{k^3}{p} + \underbrace{\#\{k \;:\; k^2 \equiv -1 \pmod p\}}_{:=B_p}.$$

По индукция имаме тъждеството $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$ и следователно

$$A_p = \frac{p(p-1)^2}{4} + \frac{B_p}{2}. \qquad (2)$$

Ще покажем, че $B_p \le 2$. Да допуснем, че съществуват две числа $1 \le \ell < k \le (p-1)/2$, такива че $\ell^2 \equiv k^2 \pmod p$. Тогава

$$p \mid (k^2-\ell^2) = (k-\ell)(k+\ell),$$

което е невъзможно, тъй като и двата множителя са по-малки от p по абсолютна стойност. Следователно, най-много едно число измежду $\{1,2,\ldots,(p-1)/2\}$ дава квадратичен остатък -1 по модул p. Оценката $B_p \le 2$ следва директно от $(p-k)^2 \equiv k^2 \pmod p$, $\forall k = 1,2,\ldots,(p-1)/2$.

Нека сега се върнем към конкретната задача с $p = 101$. Тъй като $101 = 10^2+1$, то $k = 10$ изпълнява $k^2 \equiv -1 \pmod{101}$ и значи $k = 101-10 = 91$ също. Следователно $B_{101} = 2$. Окончателно

$$A_{101} = \frac{101\cdot 100^2}{4} + \frac{2}{2} = 101\cdot 50^2 + 1 = 252501.$$

Критерии за оценяване: (7 точки) 1 т. за (1); 3 т. за (2); 2 т. за $B_{101} = 2$; 1 т. за отговор.

Забележка. Съгласно теорията за квадратичните остатъци, имаме че $B_p = 0$ ако $p = 4s+3$ и $B_p = 2$ ако $p = 4s+1$. Така, в общия случай получаваме формулата

$$A_p = \frac{p(p-1)^2}{4} + \frac{p \pmod 4 - 1}{2}.$$

Задача 9.4. В равнината са избрани точки $A_1, A_2, \dots, A_{2021}$ и точка O, така че никои три от тези 2022 точки не лежат на една права. За всяка точка A_i, $i = 1, 2, \dots, 2021$ разглеждаме всички отсечки, двата края на всяка от които се намират в дясната полуравнина спрямо лъча $A_iO^{\to}$ и са различни от A_i и O (посоката на движение е от A_i към O и дадена отсечка се разглежда тогава и само тогава, когато и двата ѝ края са вдясно по посоката на движение). Ако b_i е броя на тези отсечки, да се намери минималната стойност на сумата

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2021}.$$

Решение. Да означим с c_i броя на точките, намиращи се вдясно от лъча $A_iO^{\to}$. Тогава

$$b_i = \binom{c_i}{2} = \frac{c_i(c_i-1)}{2}.$$

Разглеждаме произволни две точки A_i, A_j, $i \neq j$, триъгълника $\triangle A_iA_jO$ и описаната около него окръжност ω_{ij}. Двете дъги на ω_{ij}, отсечени от лъча $A_iO^{\to}$ се намират в двете различни полуравнини, определени от него. Аналогично и за $A_jO^{\to}$. Следователно, A_j се намира вдясно от лъча $A_iO^{\to}$ тогава и само тогава, когато точките A_i, O, A_j са подредени върху ω_{ij} по посока на часовниковата стрелка. Но точно една от двете подредби A_i, O, A_j и A_j, O, A_i е по посока на часовнкиковата стрелка, а другата е в обратната посока. Следователно всяка двойка точки A_i, A_j допринася за увеличаване с точно 1 на сумата $\sum_{i=1}^{2021} c_i$, откъдето

$$C := \sum_{i=1}^{2021} c_i = \binom{2021}{2} = 2021 \cdot 1010. \qquad (1)$$

От неравенството между средно квадратично и средно аритметично, получаваме че

$$\sum_{i=1}^{2021} b_i = \sum_{i=1}^{2021} \frac{c_i(c_i-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2021}\left(c_i^2 - c_i\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{2021} c_i\right)^2}{2021} - \sum_{i=1}^{2021} c_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{2021} - C\right).$$

Комбинирайки с (1), заключаваме че

$$\sum_{i=1}^{2021} b_i \geq \frac{1}{2}\left(2021 \cdot (1010)^2 - 2021 \cdot 1010\right) = 2021\binom{1010}{2}. \qquad (2)$$

Равенство се достига при $c_i = c_j$, $\forall i, j$, което се реализира геометрично, когато например $A_1, A_2, \ldots, A_{2021}$ са върховете на правилен 2021-ъгълник, а O е центъра на описаната му окръжност.

Критерии за оценяване: (7 точки) 3 т. за (1); 3 т. за (2); 1 т. за геометрична конфигурация, при която равенството се достига.

Задача 10.1. Да се намерят всички двойки стойности на реалните параметри a и b, за които четирите корена на уравненията

$$ax^2 + 2x + b = 0 \qquad \text{и} \qquad bx^2 + 2x + a = 0,$$

са две по две различни реални числа, образуващи в някакъв ред аритметична прогресия.

Решение. От условието следва, че $a \neq b$ и дискримантата на двете уравнения е положителна, т.е. $ab < 1$. Да означим корените на уравнението $ax^2 + 2x + b = 0$ с x_1 и x_2, а корените на уравнението $bx^2 + 2x + a = 0$ с y_1 и y_2. Ако допуснем, че двата корена на едно от уравненията се намират между двата корена на другото уравнение, то четирите корена ще образуват аритметична прогресия единствено когато

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{a} = -\frac{2}{b} \quad \Leftrightarrow \quad a = b,$$

противоречие.
Във всички останали случаи е изпълнено равенството $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$. Тъй като

$$|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1-ab}}{|a|} = \frac{\sqrt{1-ab}}{|b|} \quad \Rightarrow \quad a = -b,$$

защото $a = b$ е невъзможно. Без ограничение, нека $a > 0$ и тогава

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+a^2}}{a} \text{ и } y_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Получаваме $y_1 = -x_1$ и $y_2 = -x_2$, като $x_2 < y_1 < 0 < x_1 < y_2$. Следователно числата x_2, y_1, x_1, y_2 образуват аритметична прогресия. От $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = y_1$ намираме

$$-\frac{1}{a} = y_1 = \frac{1 - \sqrt{1+a^2}}{a} \iff 2 = \sqrt{1+a^2} \iff a = \sqrt{3}.$$

Решенията са $a = \pm\sqrt{3}$, $b = \mp\sqrt{3}$ и корените са $\left\{\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, които образуват аритметична прогресия с разлика $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Критерии за оценяване: (6 точки) 1 т. за случая $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \iff a = b$; 3 т. за случая $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$; 2 т. за довършване.

Задача 10.2. Окръжности с диаметри страните AC и BC на $\triangle ABC$ се допират вътрешно до окръжност k, която е концентрична с вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

а) Да се докаже, че $AC = BC$.

б) Ако $\cos(\measuredangle BAC) = \dfrac{3}{5}$, да се намери отношението между радиусите на вписаната окръжност и окръжността k.

Решение. а) Ще използваме стандартните означения за $\triangle ABC$. Нека $K(I;x)$, O_1 е среда на AC (следователно център на окръжността с диаметър AC), а O_2 е среда на BC. Тъй като окръжностите се допират вътрешно, то

$$O_1I = \left|x - \frac{b}{2}\right|, \qquad O_2I = \left|x - \frac{a}{2}\right|.$$

Прилагайки косинусови теореми за $\triangle O_1CI$ и $\triangle O_2CI$, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} O_1I^2 = b^2/4 + CI^2 - b \cdot CI\cos(\gamma/2) \\[2mm] O_2I^2 = a^2/4 + CI^2 - a \cdot CI\cos(\gamma/2) \end{array}\right. \Rightarrow\ (a-b)(x - CI\cos(\gamma/2)) = 0.$$

Ако допуснем, че $x = CI\cos(\gamma/2)$, то от $x^2 - bx = CI^2 - b\cdot CI\cos(\gamma/2)$ следва, че $\cos^2(\gamma/2) = 1$, което е невъзможно. Следователно $AC = BC$.

б) Нека $CI \cap AB = D$. Тъй като $AC = BC$, CD се явява ъглополовяща, височина и медиана. От $\cos(\measuredangle BAC) = \frac{3}{5}$, изразяваме $AC = 5z$, $AD = 3z$, а значи и $CD = 4z$. Освен това

$$\frac{3}{5} = \cos(\measuredangle BAC) = \sin(\measuredangle ACD) = \frac{ID}{CI} = \frac{4z - CI}{CI} \quad \Rightarrow \quad CI = \frac{5}{2}z,\ r = DI = \frac{3}{2}z.$$

Следователно $\triangle O_1IC$ е равнобедрен и от косинусова теорема, получаваме

$$O_1I = \sqrt{2CI^2 - 2CI^2\cos(\measuredangle ACD)} = \sqrt{\frac{2CI^2}{5}} = \frac{\sqrt{10}z}{2}.$$

Окончателно,

$$\left|x - \frac{b}{2}\right| = O_1I\ \Rightarrow\ \left|x - \frac{5z}{2}\right| = \frac{\sqrt{10}z}{2}\ \Rightarrow\ x = \frac{(5 \pm \sqrt{10})z}{2},$$

от където $\dfrac{r}{x} = \dfrac{3}{5 \pm \sqrt{10}}$.

Критерии за оценяване: (6 точки) а) 1 т. за изразяване на O_1I и O_2I; 2 т. за установяване, че $AC = BC$; б) 1 т. за установяване, че O_1IC е равнобедрен; 1 т. за изразяване на O_1I; 1 т. за отговор.

Задача 10.3. Дадени са реални числа $\{x_i\}_{i=1}^n$, такива че

$$(x_1-n)^2+(x_2-n)^2+\cdots+(x_n-n)^2=n^2, \qquad n\geq 3.$$

Да се докаже, че

$$\frac{x_1}{x_2^2+n^2}+\frac{x_2}{x_3^2+n^2}+\cdots+\frac{x_n}{x_1^2+n^2}>\frac{n-1}{2n}.$$

Решение. Равенството от условието не е изпълнено ако $x_i<0$ за някое i. Ако $x_1=0$, то $x_j=n$ за всяко $j\neq 1$ и тогава неравенството е вярно, защото:

$$0+\frac{n-2}{2n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}>\frac{n-1}{2n}.$$

Следователно остава да разгледаме случая $x_i>0$ за всяко i. Записваме неравенството във вида

$$\underbrace{\frac{n^2x_1}{x_2^2+n^2}+\frac{n^2x_2}{x_3^2+n^2}+\cdots+\frac{n^2x_n}{x_1^2+n^2}}_{:=A}>\frac{n(n-1)}{2}.$$

Последователно, отделяме цялата част от всяко от събираемите и прилагаме СА-СГ за да получим

$$\begin{aligned}A&=x_1-\frac{x_1x_2^2}{x_2^2+n^2}+x_2-\frac{x_2x_3^2}{x_3^2+n^2}+\cdots+x_n-\frac{x_nx_1^2}{x_1^2+n^2}\\&>x_1+x_2+\cdots+x_n-\frac{x_1x_2^2}{2x_2n}-\frac{x_2x_3^2}{2x_3n}-\cdots-\frac{x_nx_1^2}{2x_1n}\\&=x_1+x_2+\cdots+x_n-\frac{x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1}{2n}.\end{aligned}$$

Равенство не се достига, защото за него трябва $x_i=n$, $\forall i$ и тогава $\sum_{i=1}^n(x_i-n)^2=0$, което противоречи на условието. Но

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1\leq x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2.$$

Следователно

$$A>\sum_{i=1}^n x_i-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}=\frac{2n\sum_{i=1}^n x_i-\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}=\frac{n^3-\sum_{i=1}^n(x_i-n)^2}{2n}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

С това задачата е решена.

Критерии за оценяване: (7 точки) По 1 т. за случаите $x_i<0$ и $x_1=0$; 5 т. за случая $x_i>0$ за всяко i, в това число 2 т. за отделяне на цялата част на A, 1 т. за прилагане на СА-СГ и 2 т. за довършване.

Задача 10.4. През всеки от n дни всяко от седемте джуджета или ходи в гората за гъби, или работи в диамантената мина или почиства къщата. Известно е, че за всеки три джуджета има ден през който никои две от тях не са извършвали една и съща работа. Да се намери най-малката възможна стойност на n.

Решение. Ще докажем, че $n = 4$. Да допуснем, че условието на задачата може да е изпълнено за $n = 3$. Да означим с a_1, a_2 и a_3 броя на джуджетата, които съответно ходят в гората за гъби, работят в диамантената мина или почистват къщата през първия ден. Тъй като $a_1 + a_2 + a_3 = 7$, то съществуват i и j, за които $a_i + a_j \geq 5$ (в противен случай $a_1 + a_2 \leq 4$, $a_1 + a_3 \leq 4$ и $a_2 + a_3 \leq 4$ и след събиране получаваме $a_1 + a_2 + a_3 \leq 6$). Без ограничение нека $a_1 + a_2 \geq 5$. Това означава, че има 5 джуджета, които първия ден са ходили за гъби или са работили в диамантената мина, но никое от тях не е чистило къщата. Да означим с b_1, b_2 и b_3 броя на джуджетата (от тези 5), които съответно ходят в гората за гъби, работят в диамантената мина или почистват къщата през втория ден. Тогава $b_1 + b_2 + b_3 = 5$ и аналогично на по-горе можем да приемем, че $b_1 + b_2 \geq 4$. Това означава, че има 4 джуджета, които през втория ден са ходили за гъби или са работили в диамантената мина, но никое от тях не е чистило къщата. От тези 4 джуджета поне 2 са вършили една и съща работа през третия ден, което означава, че условието не е изпълнено за тези две джуджета и произволно от останалите 2.

Пример за разпределение на работата за 4 дни (с 1, 2 и 3 са означени трите вида дейности) е следния:

Джудже	първи ден	втори ден	трети ден	четвърти ден
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	3	3	2	1
7	3	1	3	2

Критерии за оценяване: (7 точки) 3 т. за доказване, че $n \geq 4$; 4 т. за пример с $n = 4$.

Задача 11.1. Да се реши неравенството

$$\frac{\sqrt{8x - 15 - x^2}}{2 - \log_x(3x + 4)} \leq 0.$$

Решение. От $8x - 15 - x^2 \geq 0$ следва, че $x \in [3, 5]$, след което от $2 - \log_x(3x + 4) \neq 0$ определяме $x \neq 4$. Следователно множеството от допустимите стойности е $x \in [3, 5]$, $x \neq 4$. Очевидно $x = 3$ и $x = 5$ са решения на неравенството. При $x \in (3, 5)$ неравенството от условието е еквивалентно на $2 - \log_x(3x + 4) < 0$, откъдето получаваме $\log_x(3x + 4) > 2$. Тъй като $x > 1$, от свойствата на логаритмичната функция получаваме $3x + 4 > x^2 \iff$

$x \in (-1; 4)$. Но съобразявайки се с ДС, намираме $x \in (3; 4)$. Окончателно, решенията на неравенството са $x \in [3; 4) \cup \{5\}$.

Критерии за оценяване: 2 т. за определяне на ДС, 3 т. за решаване на $\log_x(3x+4) > 2$, 1 т. за окончателен отговор.

Задача 11.2. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB > CD$) е вписана окръжност, която се допира до страните AB, BC, CD, DA съответно в точките K, L, M, N като лицето на четириъгълника $KLMN$ е равно на $\frac{3}{8}$ от лицето на трапеца $ABCD$.

а) Да се намери мярката на $\measuredangle BAD$;

б) Ако O_1 и O_2 са центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ и $BC = 2$, да се намери дължината на отсечката O_1O_2.

Решение. а) Нека $\measuredangle BAD = \alpha$, $AD = BC = d$, h е височината на трапеца, а I и r са центърът и радиусът на вписаната в него окръжност. Тогава $h = d \sin\alpha = 2r$. Тъй като в трапеца може да се впише окръжност, то $AB + CD = 2d$ и $S_{ABCD} = d.h = \frac{h^2}{\sin\alpha}$.
От друга страна $\measuredangle KIN = \measuredangle KIL = 180^\circ - \alpha$, $\measuredangle MIN = \measuredangle MIL = \alpha$ и $KI = LI = MI = NI = r = \frac{h}{2}$, откъдето получаваме

$$S_{KLMN} = S_{KIN} + S_{KIL} + S_{MIL} + S_{MIN} = \frac{h^2 \sin\alpha}{2}.$$

Сега от условието $\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{8}$ следва $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и понеже $\alpha < 90^\circ$, то $\alpha = 60^\circ$.

б) Нека r_1 и r_2 са радиусите на вписаните съответно в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ окръжности, а p_1 и p_2 са полупериметрите им. Тъй като в трапеца е вписана окръжност, то вписаните в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ окръжности се допират в точка от диагонала AC и $O_1O_2 = r_1 + r_2$. За да определим r_1 и r_2, пресмятаме лицата S_1 и S_2 на $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$. От условието имаме, че $AB + CD = 4$, а от а) $AB - CD = 2$. Така намираме $AB = 3$ и $CD = 1$. Тогава

$$S_1 = \frac{AB.BC \sin 60^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ и } S_2 = \frac{AD.DC \sin 120^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

От косинусова теорема за $\triangle ABC$ намираме $AC = \sqrt{7}$ и тогава $p_1 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$ и $p_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$.
Тъй като $S_1 = p_1 r_1$ и $S_2 = p_2 r_2$ намираме $r_1 = \frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}$ и $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{7}}$.
Окончателно $O_1O_2 = \frac{7\sqrt{3} - 2\sqrt{21}}{3}$.

Критерии за оценяване: а) 2 т. за $\alpha = 60^\circ$ б) 1 т. за доказване на $O_1O_2 = r_1 + r_2$; по 1 т. за намиране на r_1 и r_2 и 1 т. за верен отговор.

Задача 11.3. Естествено число n се нарича *хубаво*, ако е изпълнено следното свойство: Съществуват поне две двойки $(a, b),\ a > b$ от взаимнопрости естествени числа, за всяка от които $a + b = n$ и уравнението

$$\frac{a^2x^3 + b^2y^3}{ab} = xy(xy + 1)$$

има точно две решения (x, y), където x и y са взаимнопрости естествени числа.

а) Намерете най-малкото хубаво число.

б) Докажете, че съществуват безбройно много хубаво числа.

Решение. Уравнението от условието се записва във вида

$$(ax^2 - by)(ax - by^2) = 0.$$

Ако $ax^2 = by$ от НОД$(a, b) =$ НОД$(x, y) = 1$ следва, че $y = a$ и $x = \sqrt{b}$. Аналогично, ако $ax = by^2$ имаме $y = \sqrt{a}$ и $x = b$. От горното следва, че даденото уравнение има две решения (x, y), където x и y са взаимнопрости естествени числа когато a и b са точни квадрати.
а) Търсим най-малкото естествено число n което се представя по два различни начина като сбор на два различни квадрата. С директна проверка за сборовете на квадратите 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 намираме, че $n = 65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$.
б) Ще покажем, че всички числа $n = 10x^2+50x+65$, където x е естествено число, са хубави. Директно се проверява, че:

$$(3x + 8)^2 + (x + 1)^2 = (3x + 7)^2 + (x + 4)^2 = 10x^2 + 50x + 65,$$

т.е. n се представя като сбор на два различни квадрата по два различни начина.

Критерии за оценяване: 1 т. за разлагането $(ax^2 - by)(ax - by^2) = 0$; 1 т. за намиране на решенията $y = a$, $x = \sqrt{b}$ и $y = \sqrt{a}$, $x = b$; 1 т. за наблюдението, че a и b са точни квадрати; 1 т. за намиране на отговора за а); 3 т. за б).

Задача 11.4. Всяка клетка на таблица 2021×2021 е оцветена в един от цветовете червен, зелен, син или жълт. Таблицата се нарича *магическа*, ако съществуват цели положителни числа a, b, c и d, за които $a + b + c + d = 12$, със следното свойство:
Както и да поставим правоъгълник 3×4 (или 4×3) върху дъската, той съдържа a червени, b зелени, c сини и d жълти клетки.
Намерете броя на магическите таблици. Две таблици са различно оцветени, ако съществува клетка от едната таблица, която е различно оцветена от съответната ѝ клетка от другата таблица.

Решение. Да разгледаме една магическа таблица и правоъгълник 5×4 от нея, съставен от клетките $1, 2, \ldots, 20$.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

Ще докажем, че всеки от цветовете на клетки 1, 2, 3 и 4 се среща в някоя от клетките 5, 6, 7, и 8. Правоъгълниците 4×3 с ъглови клетки 1, 3, 13, 15 и 5, 7, 17, 19 се пресичат в квадрата с ъглови клетки 5, 7, 13, 15. Това означава, че цветовете в 1, 2, 3 съвпадат с цветовете в 17, 18, 19. Аналогично, цветовете в 2, 3, 4 съвпадат с цветовете в 18, 19, 20. Следователно всеки цвят, който се среща в 1, 2, 3, 4 се среща в някоя от клетките 17, 18, 19, 20 (1).
От друга страна правоъгълниците 3×4 с ъглови клетки 5, 8, 13, 16 и 9, 12, 17, 20 се пресичат в правоъгълника с ъглови клетки 9, 12, 13, 16. Това означава, че цветовете в клетки 17, 18, 19, 20 съвпадат с цветовете в клетки 5, 6, 7, 8 (2).
От (1) и (2) следва, че всеки от цветовете на клетки 1, 2, 3 и 4 се среща в някоя от клетките 5, 6, 7, и 8 (3).
Сега да разгледаме произволен правоъгълник 3×4 и да изберем произволна клетка (без ограничение нека тя е червена) от най-горния му ред. От (3) следва, че във втория ред също има червена клетка. Сега пак от (3) следва, че и в следващия ред има червена клетка. Седователно в целия правоъгълники има поне 3 червени клетки, т.е. $a \geq 3$ и аналогично $b, c, d \geq 3$. Тъй като $a + b + c + d = 12$, то $a = b = c = d = 3$.
Ще докажем, че във всеки четири съседни клетки в ред или стълб се срещат и четирите цвята (4). Да допуснем противното и нека в клетките 1, 2, 3, 4 има две червени клетки. Според (3) в 5, 6, 7, 8 и 9, 10, 11, 12 също има червена клетка. Тогава в правоъгълника 3×4 с ъглови клетки 1, 4, 9, 12 има поне 4 червени клетки, противоречие с $a = 3$.
Да забележим, че (4) гарантира, че във всеки правоъгълник 3×4 всеки цвят се среща по 3 пъти. Сега е ясно, че цялата таблица се попълва еднозначно, ако знаем как е попълнен произволен квадрат 4×4.
Да означим цветовете с x, y, z и t. Първият ред на квадрат 4×4 може да се оцвети по $4! = 24$ начина. Да разгледаме оцветяването $xyzt$.

x	y	z	t
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

За цвета на клетката 5 има три възможности – y, z или t, като за всеки от тези три случая броят на таблиците е един и същ. Нека цветът на клетка 5 е y.

x	y	z	t
y	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Случай 1. Ако 6 е с цвят x, то 7 е t, а 8 е z. За цветовете на 9 и 13 остават z и t или t и z (като тогава 10 и 14 са определени еднозначно). За цветовете на 11 и 15 остават x и y или y и x (като тогава 12 и 16 са определени еднозначно). Общо в този случай имаме $24.3.2.2 = 288$ таблици.

Случай 2. Ако цвета на клетка 6 е z или t, то за всеки от тези два случая броят на таблиците е един и същ. Нека цветът на клетка 6 е z. Тогава цветът на 7 е t, а цветът на 8 е x.

x	y	z	t
y	z	t	x
9	10	11	12
13	14	15	16

За цвета на клетката 9 има две възможности – z или t, като за всеки от тези два случая останалите клетки се оцветяват еднозначно. Поучават се таблиците

x	y	z	t
y	z	t	x
z	t	x	y
t	x	y	z

x	y	z	t
y	z	t	x
t	x	y	z
z	t	x	y

Следователно различно оцветените таблици в случай 2 са $24.3.2.2 = 288$.
Общо имаме 576 различни таблици.

Критерии за оценяване: 2 т. за доказване на $a = b = c = d = 3$; 2 т. за доказване, че във всеки правоъгълник 1×4 (или 4×1) се срещат и четирите цвята; 1 т. за доказване, че оцветяването на цялата таблица се определя еднозначно от оцветяването на квадрат 4×4; 2 т. за получаване на отговора.

Задача 12.1. Да се докаже, че съществува естествено число n_0 така, че за всяко цяло число $n \geq n_0$ уравнението

$$\underbrace{\sin(\sin(\dots(\sin x)))}_{n \text{ пъти}} = \underbrace{\cos(\cos(\dots(\cos x)))}_{n \text{ пъти}}$$

няма реален корен.

Решение. Да означим с $f_n(x)$ и $g_n(x)$ съответно лявата и дясната част на даденото уравнение.

Понеже $\cos(\cos t) \geq 1 - (\cos t)^2/2 \geq 1/2$, то (1) $g_n(x) \geq 1/2$ при $n \geq 2$. (Алтернативно, $|\cos t| \in [0, 1] \subset [0, \pi/3)$ и значи $\cos(\cos t) > \cos(\pi/3) = 1/2$.)

От друга страна, тъй като $\sin t$ е растяща функция в $[0, 1]$, от $|\sin t| \leq |t|$ по индукция следва, че (2) $|f_{n+1}(x)| \leq f_n(1) =: a_n$. Понеже $0 < a_{n+1} = \sin a_n < a_n$, то (a_n) е сходяща редица. За нейната граница l имаме, че $\sin l = l$, откъдето $l = 0$. Тогава от (2) следва, че съществува $n_0 \geq 2$ така, че (3) $f_n(x) < 1/2$ при $n \geq n_0$ и $x \in \mathbb{R}$.

Сега от (1) и (3) получаваме, че $f_n < g_n$ при $n \geq n_0$.

Критерии за оценяване: (6 точки) 2 т. за (1), 1 т. за (2), 2 т. за $a_n \to 0$ и 1 т. за (3).
Забележка. Може да се докаже, че даденото уравнение има реален корен само при $n = 1, 2, 3$.

Задача 12.2. Окръжност k през върха B на $\triangle ABC$ се допира до правата AC в точката C. Точка D върху страната AB е такава, че отсечката CD пресича k за втори път в точка

E, като $BE = DE$. Да се докаже, че ако радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ са равни, то $BC = 2EC$.

Решение. Нека $\measuredangle ABE = x$ и $\angle CBE = y$. От първото условие следва, че $\measuredangle ACD = y$, а от второто – $\angle BDC = x$.
Нека $CH \perp AB$ ($H \in AB$). Понеже

$$r_{\triangle ACD} = \frac{AD.CH}{AC + CD + AD},\ r_{\triangle BCD} = \frac{BD.CH}{BC + CD + BD},\ \text{то}$$

$$r_{\triangle ACD} = r_{\triangle BCD} \Leftrightarrow \frac{AC + CD}{AD} = \frac{BC + CD}{BD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x + \sin(x - y)}{\sin y} = \frac{\sin x + \sin(x + y)}{\sin(2x + y)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin(x - \frac{y}{2})\cos\frac{y}{2}}{\sin y} = \frac{2\sin(x + \frac{y}{2})\cos\frac{y}{2}}{2\sin(x + \frac{y}{2})\cos(x + \frac{y}{2})}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(x - \frac{y}{2})\cos(x + \frac{y}{2}) = \sin y \Leftrightarrow \sin 2x - \sin y = \sin y \Leftrightarrow BC = 2EC.$$

Критерии за оценяване: (6 точки) По 1 т. за всяко $\Leftrightarrow$.
Забележки. а) От решението следва, че обратното твърдение (W. Pompe, 2020 г.) също е вярно.
б) Ако $\measuredangle ACB = 90^\circ$, то $\triangle ABC$ изпълнява дадените условия точно когато $\measuredangle ABC = 75^\circ$.

Задача 12.3. Да се реши в цели числа уравнението

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x^2 - y}.$$

Решение. Имаме, че $(x^2 - y)(x + y + 1) = xy$, т.е.

$$y^2 - (x^2 - 2x - 1)y - x^3 - x^2 = 0.$$

Пресмятаме (1) $D = (x^2 - 2x - 1)^2 + 4(x^3 + x^2) = x^4 + 6x^2 + 4x + 1$. Да забележим, че (2) $(x^2 + 3)^2 < D < (x^2 + 4)^2$ при $x \geq 3$ и (3) $(x^2 + 2)^2 < D < (x^2 + 3)^2$ при $x \leq -3$. Остават случаите $x = \pm 1, \pm 2$, откъдето (4) $(x, y) = (-1, 2)$, $(2, -4)$, $(2, 3)$.

Критерии за оценяване: (7 точки) 1 т. за (1) и по 2 т. за (2), (3) и (4).

Задача 12.4. Да се намери най-малкият периметър на сечение на правилен тетраедър с ръб 1 и равнина през медицентъра му.

Решение. Нека π е равнина през медицентъра M на правилен тетраедър $ABCD$ с ръб 1. Нека π пресича три ръба с общ връх, например AD, BD, CD съответно в точки A_1, B_1, C_1. Тогава сечението е $\triangle A_1B_1C_1$. Полагаме $A_1D = x$, $B_1D = y$, $C_1D = z$. Понеже

$$\overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DA_1}}{4x} + \frac{\overrightarrow{DB_1}}{4y} + \frac{\overrightarrow{DC_1}}{4z}$$

и $M \in \pi$, то (1) $1/x + 1/y + 1/z = 4$. Следователно

$$(2)\ P_{\triangle A_1B_1C_1} = \sqrt{x^2+y^2-xy} + \sqrt{y^2+z^2-yz} + \sqrt{z^2+x^2-zx}$$
$$\geq \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} \geq \frac{9}{4}$$

съгласно неравенството между средното аритметично и средното хармонично.
Ако π не пресича три ръба с общ връх, то можем да считаме, че π пресича ръбовете BA, BC, DC, DA съответно в точки E, F, G, H. Както по-горе следва, че

$$(3) P_{EFGH} \geq \frac{BE+BF}{2} + \frac{CF+CG}{2} + \frac{DG+DH}{2} + \frac{AH+AE}{2} = 2.$$

Равенство се достига, когато E, F, G, H са среди на съответните ръбове. Понеже тези среди и M лежат в една равнина (M е центърът на квадрата $EFGH$), заключаваме, че (4) $\min P_\pi = 2$.

Критерии за оценяване: (7 точки) 1 т. за (1), 3 т. за (2), 2 т. за (3), и 1 т. за (4).

Автори на задачите: 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1 – Максим Йорданов, 9.2 – Динко Раднев , 9.3 – Станислав Харизанов, 9.4 – Александър Иванов; 10.1 – Диана Данова, 10.2 – Таня Стоева, 10.3 – Диана Данова и Станислав Харизанов, 10.4 – Емил Колев; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова, 11.3, 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.3, 12.4 – Николай Николов