МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

31 март – 1 април 2014 г., Русе

Задачи, решения, оценяване

8.1. Да се реши уравнението $\left|x^2-3x+1\right|=\left|2-|x-1|\right|$.

Решение: Уравнението е еквивалентно на обединението от уравненията (1) $x^2-3x+1=2-|x-1|$ и (2) $x^2-3x+1=|x-1|-2$.

За уравнението (1) $-x^2+3x+1=|x-1|$ разглеждаме два случая:

1) при $x\geq 1$ уравнението добива вида $x^2-2x-2=0$ и има две решения $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$, от които само $x=1+\sqrt{3}$ е в разглеждания интервал;

2) при $x<1$ уравнението добива вида $x^2-4x=0$ и има две решения $x=0$ и $x=4$, като само $x=0$ е в разглеждания интервал.

За уравнението (2) $x^2-3x+3=|x-1|$ също разглеждаме случаите

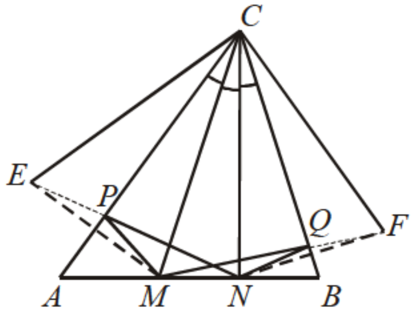
1) при $x\geq 1$, като уравнението добива вида $x^2-4x+4=0$ и има единствено решение $x=2$, което е в разглеждания интервал;

2) при $x<1$ уравнението добива вида $x^2-2x+2=0$ и няма реални корени.

Отговор: $x=1+\sqrt{3}$, $x=0$ и $x=2$.

Оценяване: 2 точки за свеждане на задачата до двете уравнения $x^2-3x+1=2-|x-1|$ и $x^2-3x+1=|x-1|-2$; по 2 точки за решаване на всяко от двете уравнения (по 1 точка за всеки еидн от двата случая).

8.2. Върху страната AB на ΔABC са взети такива точки M и N в последователност A, M, N и B, че отсечките CM и CN разделят $\angle ACB$ на три равни части. Точката P лежи на страната AC и е такава, че $\angle APM=\angle NPC$, а точката Q лежи върху страната BC и е такава, $\angle BQN=\angle MQC$. Да се докаже, че дължините на начупените линии MPN и NQM са равни.



Решение: Нека точките E и F са симетричните съответно на точките M и N спрямо AC и BC. Тогава $\angle MPA = \angle EPA = \angle NPC$,

$$\angle NQB = \angle FQB = \angle MQC,\ PM = PE \text{ и } QN = QF.$$

Следователно точките N, P и E лежат на една права и $NE = NP + PM$. Аналогично точките M, Q и F лежат на една права и $MF = MQ + QN$. От симетрията получаваме още, че $CE = CM$ и $CN = CF$, $\angle ACM = \angle ACE$ и $\angle BCN = \angle BCF$. По условие $\angle ACM = \angle MCN = \angle NCB$, откъдето намираме, че $\angle ECN = \angle FCM$ и $\Delta ECN \cong \Delta FCM$ (по първи признак). Следователно $NE = MF$ и дължините на начупените линии MPN и NQM са равни.

Оценяване: 1 точка за въвеждане на симетричните точки E и F; 3 точка за свеждане на задачата до равенство на отсечките NE и MF (по 1 точка за частични резултати, водещи до това свеждане); 2 точки за доказване на еднаквостта $\Delta ECN \cong \Delta FCM$.

8.3. Намерете най-голямото двуцифрено число n, за което има n цели числа, чието средно аритметично не е цяло, а средното аритметично на всеки m от тях, $m = 2, 3, \ldots, n-1$, е цяло.

Решение: Нека n е такова, че има n цели числа с исканото свойство. Разглеждаме каноничното разлагане $n = p_1^{s_1} p^{s} \ldots p_k^{s_k}$. Да допуснем, че $k \geq 2$. Това означава, че можем да разделим n-те числа на $p_2^{s_2} \ldots {}_k^{s_k}$ множества от по $p_1^{s_1}$ числа. По условие числата във всяко от множествата имат сбор, кратен на $p_1^{s_1}$. Следователно сборът на n-те числа се дели на $p_1^{s_1}$. По аналогичен начин следва, че сборът на n-те числа се дели на $p_2^{s_2}$, ..., $p_k^{s_k}$, а значи и на n. Заключаваме, че допускането $k \geq 2$ не е вярно, т.е. трябва $k = 1$. Доказахме, че n е степен на просто число. Най-голямото двуцифрено n, за което $k = 1$, е 97. Като пример могат да се посочат числата 1, 1, 1, ..., 1, 1, 96!+1.

Оценяване: 4 точки за доказване, че n трябва да е степен на просто число; 3 точки за построяване на пример.

8.4. Ако a, b и c са положителни реални числа, да се докаже, че

$$\frac{a^2+6a+12b+9}{c} + \frac{b^2+6b+12c+9}{a} + \frac{c^2+6c+12a+9}{b} \geq 72.$$

Кога се достига равенство?

Решение: От неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва, че $a\ \ +9 \geq 2\sqrt{9a^2} = 6a$, т.е. $a^2+9 \geq 6a$, като равенство се достига тогава и само тогава, когато $a = 3$. Така $\dfrac{a^2+6a+12b+9}{c} \geq \dfrac{6a+6a+12b}{c} = 12\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)$. Следователно

$$\frac{a^2+6a+12b+9}{c} + \frac{b^2+6b+12c+9}{a} + \frac{c^2+6c+12a+9}{b} \geq 12\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right) + 12\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right) + 12\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right) =$$

$$= 12\left(\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right) \geq 12.2+12.2+12.2 = 72.$$

Тук използвахме, че $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ (аналогично и за другите събираеми), което отново е следствие от неравенството между средното аритметично и средното геометричното. Сега равенство се достига тогава и само тогава, когато $a=c$. С това неравенството от условието на задачата е доказано, като равенство се достига тогава и само тогава, когато $a=b=c=3$.

Оценяване: 4 точки за свеждане на неравенството до $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq 6$ или до еквивалентна форма; 2 точки за доказване на $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$; 1 точка за изследване на равенството.

Задачите са предложени, както следва:

8.1. и 8.2. – Мариана Кьосева, 8.3. – Ивайло Кортезов, 8.4. – Веселин Ненков и Сава Гроздев.