Пролетни математически състезания
Плевен, 30 март – 1 април 2018 г.
Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се реши уравнението

$$x + \sqrt{x^2+2} = 2a + 1 + \sqrt{2ax + 2a + 3},$$

където a е реален параметър.

Решение. Уравнението има смисъл при $2ax + 2a + 3 \geq 0$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2+2} = 2a + 1 + \sqrt{2ax+2a+3} \quad &\iff \quad \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2ax+2a+3} = 2a+1-x \\ &\iff \quad \frac{x^2-2ax-2a-1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2ax+2a+3}} = 2a+1-x \\ &\iff \quad \frac{(x+1)(x-2a-1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2ax+2a+3}} = 2a+1-x. \end{aligned}$$

При $x = 2a+1$ получаваме решение, защото $2a(2a+1)+2a+3 = 4a^2+4a+3 = (2a+1)^2+2 > 0$. При $x \neq 2a+1$ достигаме до уравнението

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2ax+2a+3}} + 1 = 0,$$

което няма решение. Действително, при $x \geq -1$ лявата страна очевидно е положителна, а при $x < -1$ имаме

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2ax+2a+3}} > \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}} > \frac{x+1}{|x|} > -1$$

(последното е еквивалентно на $x + |x| + 1 > 0$, което очевидно е изпълнено).

Окончателно, за всяко реално a уравнението има единствено решение $x = 2a+1$.

Критерии за оценяване. (6 точки) 2 т. за еквивалентни преобразования и рационализиране на лявата част уравнението; 1 т. за разлагане на квадратния тричлен; 1 т. за установяване на решението $x = 2a+1$, 2 т. за доказване, че няма други решения.

Задача 9.2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$). Точка O от средната отсечка MN (M е среда на AC, N е среда на BC) е такава, че $\sphericalangle AOC = 90^\circ$, а точка P от отсечката AO е такава, че $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCO$. Да се докаже, че $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBO$.

Решение. Тъй като OM е медиана в правоъгълния $\triangle AOC$, имаме $\sphericalangle OAC = \sphericalangle AOM$. Оттук и от $MN \| AB$ имаме $2 \sphericalangle OAM = \sphericalangle OMC = \sphericalangle BAC := \alpha$. Следователно $\sphericalangle OAC = \sphericalangle AOM = \frac{\alpha}{2}$. Тогава имаме $\sphericalangle BCO = 90^\circ - \sphericalangle ACO = \sphericalangle OAC = \frac{\alpha}{2}$ и от условието следва, че $\sphericalangle ACP = \frac{\alpha}{2}$.

От $\sphericalangle ACP = \sphericalangle PAC = \frac{\alpha}{2}$ следва, че $\triangle APC$ е равнобедрен. Тогава PM е медиана и височина, т.е. $PM \perp AC$, откъдето $PM \| BC$.

Нека правата MP да пресича AB в точка K. Тогава MK е средна отсечка в $\triangle ABC$. Освен това $\triangle AKP \sim \triangle CNO$ по първи признак. Следователно $\triangle ABP \sim \triangle CBO$, защото $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BCO = \frac{\alpha}{2}$ и от $\frac{AP}{AK} = \frac{CO}{CN}$ следва $\frac{AP}{AB} = \frac{CO}{CB}$. От последното подобие получаваме исканото $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBO$.

Критерии за оценяване. (6 точки) 1 т. за доказателство, че $\sphericalangle BAC = 2 \sphericalangle OAM$; 1 т. за доказване, че $\triangle ACP$ е равнобедрен; 1 т. за $PM \| BC$; 1 за въвеждане на точка K и доказателство на подобието $\triangle AKP \sim \triangle CNO$; 2 т. за довършване.

Забележка. Допълнителното построение може да се избегне с намиране на подобието $\triangle PCO \sim \triangle ABC$.

Задача 9.3. За всяко естествено число $n \geq 10$ с десетичен запис $\overline{abcde\ldots}$ дефинираме числото $f(n) = a^b c^d e \ldots$, като считаме, че $0^0 = 1$, и, ако n има нечетен брой цифри, последната е на първа степен (например $f(235) = 2^3.5 = 40$ и $f(2358) = 2^3.5^8 = 3125000$). Числото n се нарича стабилно, ако $f(n) = n$.

а) Да се намерят всички стабилни естествени числа, които са по-малки от 2018.

б) Съществува ли стабилно число, по-голямо от 2018?

Решение. а) Отговор – няма такива!

Ако $n = \overline{abc}$ е стабилно трицифрено число, то $100a + 10b + c = a^b c \iff 10(10a+b) = (a^b - 1)c$. Очевидно $a \geq 2$, $b \geq 2$ и $c > 0$ (иначе $a^b.c \leq ac \leq 81$). Ще разгледаме различните възможности за b.

При $b \geq 5$ имаме $999 \geq n \geq 4^5.c \geq 1024$ при $a \geq 4$. Ако $a = 2$, получаваме $10(20+b) = (2^b - 1)c$, където c очевидно е четно и значи $5 | 2^b - 1$, т.е. $b = 8$ (показателят на 2 по модул 5 е 4) и $280 = 255c$, противоречие.

Ако $a = 3$, имаме $(3^b - 1)c = 10(30 + b) \in [350, 390]$, откъдето $b = 5$ и $350 = 242c$, противоречие. Следователно $b \in \{2, 3, 4\}$.

При $b = 2$ получаваме $20(5a + 1) = (a^2 - 1)c$, откъдето $5|a^2 - 1$, т.е. $a = 4$ или 6 или $5|c$, т.е. $c = 5$. И в двата случая нямаме решение. Аналогично се отхвърля и случаят $b = 3$ (само $a = 6$ или $c = 5$). При $b = 4$ получаваме $20(5a + 2) = (a^4 - 1)c$. Ако a е четно, то $8|c$, т.е. $c = 8$ и нямаме решение. Ако a е нечетно, имаме противоречие по модул 8.

Ако $n = \overline{abcd}$ е стабилно четирицифрено число, ненадминаващо 2018, то $n = c^d$. Възможностите за последното в интервала $[1000, 2018]$ са $4^5 = 1024$ и $6^4 = 1296$ (ясно е, че има максимум една степен на цифра в този интервал) и те не водят до решение.

б) Да, $n = 2592 = 2^5.9^2$.

Критерии за оценяване. (7 точки) 5 т. за а) и 2 т. за б). За а): 1 т. за ограниченията $a \geq 2$, $b \geq 2$ и $c > 0$, 2 т. за отхвърляне на $b \geq 5$, 1 т. за отхвърляне на $b \in \{2, 3, 4\}$ и 1 т. за отхвърляне на числата, ненадминаващи 2018.

Забележка. Понятието стабилно число в смисъла на тази задача е въведено от Конуей през 2007 г. Освен едноцифрените числа и 2592 е известно още само едно стабилно число, а именно 24547284284866560000000000. Известно е още, че няма други стабилни числа, по-малки от 10^{100}.

Задача 9.4. Дадени са естествени числа n и m, за които $n \geq m \geq 2$. Група от няколко монети се нарича n-добра, ако в нея няма повече от n монети с една и съща стойност. Число S се нарича n-достижимо, ако в групата има n монети със сбор от стойностите им, равен на S. Да се намери най-малката стойност на естествено число D, за което за всяка n-добра група от D монети съществуват поне m различни числа, които са n-достижими.

Решение. Да разгледаме група от $n + m - 2$ монети, в която има n монети от 1 лев и $m - 2$ монети от 2 лева. Всяко n-достижимо число има вида $x + 2y$, където x е броя на монетите от 1 лев, а y е броя на монетите от 2 лева и $x + y = n$. Следователно $x + 2y = n + y$. Тъй като монетите от 2 лева са $m - 2$, то y може да приема стойности $0, 1, 2, \dots, m-2$, т.е. $m-1$ стойности. Следователно n-достижимите числа са $m-1$, т.е. $D > n+m-2$.

Да разгледаме произволна група от $n + m - 1$ монети и да ги подредим по големина:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+m-1}.$$

За всяко $i = 1, 2, \dots m$ да разгледаме сборовете

$$S_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{n+i-1}.$$

Тъй като групата е n-добра, то не може да има $n + 1$ последователни равни числа. Това означава, че $a_{n+i} > a_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots m - 1$. Понеже $S_{i+1} - S_i = a_{n+i} - a_i > 0$, то

$$S_i < S_{i+1} < \dots < S_m.$$

Следователно числата $S_1, S_2, \dots, S_m$ са различни и са n-достижими, т.е. $D = m + n - 2$.

Критерии за оценяване. (7 точки) 3 т. за неравенството $D > n + m - 2$; 4 т. за доказване, че във всяка n-добра група от $m + n - 1$ монети има поне m числа, които са n-достижими.

Задача 10.1. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{ccccc} y & + & 2 \cdot 4^{x+y-1} & = & 10 \\ \frac{4}{\sqrt{2y-3}} & + & 2^{2-x-y} & = & 5 \end{array} \right. .$$

Решение. Да запишем системата във вида

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2y-3 & + & 4^{x+y} & = & 17 \\ \frac{4}{\sqrt{2y-3}} & + & \frac{4}{2^{x+y}} & = & 5 \end{array} \right. .$$

Полагаме $u = \sqrt{2y - 3}$ и $v = 2^{x+y}$, $u \geq 0, v > 0$ и получаваме

$$\left| \begin{array}{ccccc} u^2 & + & v^2 & = & 17 \\ \frac{1}{u} & + & \frac{1}{v} & = \frac{5}{4} & \end{array} \right. ,$$

т.е. $(u + v)^2 - 2uv = 17, u + v = \frac{5}{4}uv$.

Ако $X = uv$, то получаваме

$$\frac{25}{16}X^2 - 2X - 17 = 0$$

с корени $X_1 = 4$ и $X_2 = -\frac{68}{25}$. Тъй като $uv \geq 0$, то вторият корен не води до решение. Оттук получаваме $u+v=5, uv=4$, т.е. u, v са корени на уравнението $Y^2 - 5Y + 4 = 0$. Това води до два случая,

$$\text{(i)} \quad u=4, v=1, \qquad \text{(ii)} \quad u=1, v=4,$$

от които получаваме решенията (i) $x = -\frac{19}{2}, y = \frac{19}{2}$ и (ii) $x=0, y=2$.

Критерии за оценяване. (6 точки) 2 т. за преобразуване на системата и извършване на полагането, 2 т. за решаване на системата в новите променливи и за отхвърляне на едното решение, 2 т. за намиране на решенията на системата от условието.

Задача 10.2. Даден е триъгълник ABC, вписан в окръжност k_1. Окръжността k_2 се допира до k_1 в точка C и до страната AB в точка T. Правата CT пресича k_1 за втори път в точка Q. Правата QN, $N \in k_2$, е допирателна към k_2. Да се докаже, че окръжността, описана около $\triangle ABN$, минава през центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Решение. От пресмятане на $\sphericalangle BAC$ чрез дъги в k_2 следва, че дъгите в тази окръжност, отговарящи на $\sphericalangle ACT$ и $\sphericalangle BCT$, са равни, т.е. CT е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Тогава Q е среда на дъгата $\overset{\frown}{AB}$ от k_1 и $QA = QB = QI$, където I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Ще докажем, че $QN = QI$, откъдето исканото следва.

Имаме $QN^2 = QT.QC$ и остава да изразим QT и QC. От $\triangle ACT \sim QCB$ получаваме $QC = \frac{AC.QB}{AT}$, а от $\triangle BTQ \sim \triangle CTA$ имаме $QT = \frac{QB.AT}{AC}$. Умножаването на последните две равенство дава $QN = QI$.

Критерии за оценяване. (6 точки) 1 т. за доказване, че CT е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, 1 т. за $QA = QB = QI$, 1 т. за $QN^2 = QT.QC$, по 1 т. за изразяването на QT и QC, 1 т. за довършване.

Задача 10.3. За редицата от цели числа $A = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ означаваме с $D_m(A)$ безкрайната редица, получена от A след изтриване на всеки неин m-ти член:

$$D_m(A) : a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m+1}, \ldots,$$

а с $S(A)$ означаваме редицата от частичните суми на A:

$$S(A) : a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots.$$

Нека $A = (a_i)_{i=1}^{\infty}$, където $a_n = 1 + (n-1)d$ за всяко естествено число n и d е естествено число. Да се намерят всички n и d, за които редицата $S(D_2(S(D_3(A))))$ съдържа числото 2^{2018}.

Решение. Нека редицата A има исканото свойство. Да означим с $B = (b_i)_{i=1}^{\infty}$ редицата $S(D_3(A))$. Тогава

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= (a_1 + a_4 + \ldots + a_{3k+1}) + (a_2 + a_5 + \ldots + a_{3k-1}) \\ &= \frac{(2a_1 + k \cdot 3d)(k+1)}{2} + \frac{(2a_2 + (k-1) \cdot 3d)k}{2} \\ &= 2k + 1 + (3k^2 + k)d. \end{aligned}$$

Нека по-нататък $C = S(D_2(B)) = (c_i)_{i=1}^{\infty}$. Тогава

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1 + (3k^2 + k)d) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) + 3d \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + d \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= n^2 + 3d \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + d \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2 (1 + (n-1)d). \end{aligned}$$

Следователно $(1 + (n-1)d)n^2 = 2^{2018}$ за някои естествени n и d. Тогава $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, откъдето

$$(2^t - 1)d = 2^{2018 - 2t} - 1.$$

Следователно $2^t - 1$ дели $2^{2018-2t} - 1$, което означава, че t дели $2018 - 2t$. Сега е ясно, че t е едно от числата 1, 2, 1009, 2018. Тъй като $2018 - 2t > 0$, имаме $t = 1$ или 2. Това дава решенията

$$n = 2, d = 2^{2016} - 1, \quad n = 4, d = \frac{2^{2014} - 1}{3}.$$

Критерии за оценяване. (7 точки) 1 т. за получаване на членовете на редицата B в явен вид, 2 т. за изразяване на членовете на редицата C, 2 т. за доказване, че поредният номер на 2^{2018} е $n = 2^t$, където t е делител на 2018, 2 т. за получаване на решенията и отхвърляне на делителите 1009 и 2018.

Задача 10.4. Вж. Задача 11.4.

Задача 11.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството

$$\log_{a+2-x}\left(\log_{x-a} a\right) > 0$$

има решение.

Решение. Допустимите стойности са $a > 0$, $x \in (a, a+2)$, $x \neq a+1$ и $\log_{x-a} a > 0$.

1. При $x \in (a, a+1)$ имаме $a+2-x > 1$ и $x - a < 1$. Неравенството е еквивалентно на

$$a < x - a \iff x > 2a.$$

За да има решение неравенството трябва $2a < a+1$, т.е. $0 < a < 1$.

2. При $x \in (a+1, a+2)$ имаме $a+2-x < 1$ и $x-a > 1$. Неравенството е еквивалентно на

$$0 < \log_{x-a} a < 1,$$

откъдето получаваме

$$1 < a < x - a.$$

За да има решение неравенството трябва $1 < a$ и $2a < a+2$, т.е. $1 < a < 2$.

Окончателно търсените стойности са $0 < a < 2, a \neq 1$.

Критерии за оценяване. (6 точки) 1 т. за допустимите стойности; 2 т. за случая $x \in (a, a+1)$; 3 т. за случая $x \in (a+1, a+2)$.

Задача 11.2. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с център O_1, която се допира до страните му AB, BC и AC съответно в точки C_1, A_1 и B_1. Външновписаната към страната AB окръжност има център O_2 и се допира до AB и продълженията на страните AC и BC съответно в точки C_2, B_2 и A_2. Нека O_1C_1 пресича A_1B_1 в точка M, а O_2C_2 пресича A_2B_2 в точка N. Да се докаже, че $C_1M = C_2N$.

Решение. Ако $AC = BC$, то поради $AB_1 = AB_2 = BA_1 = BA_2$ отсечката AB е средна отсечка в трапеца $B_2A_2A_1B_1$. Тогава точките C_1 и C_2 съвпадат и C_1 е среда на MN.

Нека $AC > BC$ и да означим пресечните точки на AB с A_1B_1 и A_2B_2 съответно с P и Q. От $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ Следва, че $\sphericalangle APB_1 = \sphericalangle BQA_2$ и $\sphericalangle AB_1P + \sphericalangle BA_2Q = 180°$. Сега от $AB_1 = AC_1 = BC_1 = BA_2$ следва, че

$$AP = \frac{AB_1 \sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{BA_2 \sin(180° - \psi)}{\sin\varphi} = BQ,$$

откъдето $PC_1 = QC_2$. Следователно $\triangle PC_1N \cong \triangle QC_2N$, т.е. $C_1N = C_2N$.

Оценяване.

Задача 11.3. Нека $k \in (1/2, 1)$ и $a_1 > 0$. Да се докаже, че редицата с общ член $a_{n+1} = ka_n + (1-k)/a_n$ е сходяща и да се намери границата ѝ.

Решение. Имаме, че

$$(1)\ a_{n+1} - a_n = (1-k)(1/a_n - a_n), \quad (2)\ a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)(k - (1-k)/a_n).$$

Понеже $m = (1-k)/k \in (0, 1)$, по индукция следва, че:

(3) ако $a_1 \geq 1$, то $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 1$;

(4) ако $0 < a_1 \leq m$, то $a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 1$;

(5) ако $m < a_1 < 1$, то $a_1 < a_2 < \cdots < 1$.

Значи редицата $a_2, a_3 \ldots$ е монотонна и ограничена, и следователно е сходяща. За границата ѝ l имаме, че $l = kl + (1-k)/l$, откъдето (6) $l = 1$.

Критерии за оценяване. По 1 т. за всяко (i).

Задача 11.4. Съществуват ли взаимнопрости естествени числа a и b, за които $a > 2018$, $b > 2018$ и за всяко естествено число $c > 2018$ числото $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$ има прост делител p от вида $p = 3k + 2$?

Решение. Да допуснем, че такива a и b съществуват и да изберем $c = a + b$. Тогава

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = (a^2 + ab + b^2)^2.$$

Нека $p = 3k+2$ е просто число, което дели a^2+ab+b^2. Ако $p|a$, то $p|b^2$, т.е. p е общ делитер на a и b, противоречие. Следователно p не дели нито a, нито b.

Имаме $a^3 \equiv b^3 \pmod p$. Следователно $a^{3k} \equiv b^{3k} \pmod p$, а от друга страна $a^{3k+1} \equiv b^{3k+1} \pmod p$ (от теоремата на Ферма). От последните две сравнения получаваме $a \equiv b \pmod p$. Тъй като p дели $a^2 + ab + b^2$, то p дели $3a^2$. Понеже $p = 3k + 2 \neq 3$, то p дели a и b, противоречие.

Критерии за оценяване. 2 т. за избор на c, което работи, 5 т. за доказване, че избраното c работи.

Задача 12.1. Нека I и M са центърът на вписаната окръжност и медицентърът на $\triangle ABC$, за който $AC \neq BC$. Да се докаже, че $IM \perp AB$ тогава и само тогава, когато $AC + BC = 3AB$.

Първо решение. Нека D и E са проекциите на C и I върху правата AB, а F е средата на страната AB. Тогава

$$(1) \quad IM \perp AB \Leftrightarrow ME||CD \Leftrightarrow FD = 3FE.$$

Ще следваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Можем да сичтаме, че $a < b$. Тогава

$$(2) \quad FE = AE - AF = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2},$$

$$(3)\ FD = AD - AF = b\cos\alpha - \frac{c}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} - \frac{c}{2} = \frac{b^2-a^2}{2c}.$$

От (1), (2) и (3) следва, че $IM \perp AB \Leftrightarrow a + b = 3c$.

Критерии за оценяване. 2 т. за (1), 1 т. за (2), 2 т. за (3) и 1 т. за заключение.

Второ решение. Нека $C_1 = CI \cap C_1$, а A_1 и B_1 са такива точки съответно върху страните BC и AC, че $AB_1 = AC_1$ и $BA_1 = BC_1$. Понеже AI и BI са симетрали на B_1C_1 и A_1C_1, то I е центърът на описаната окръжност около $\triangle A_1B_1C_1$. Следователно (1) $IC_2 \perp A_1B_1$, където C_2 е средата на A_1B_1. От друга страна,

$$\frac{AB_1}{BA_1} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC}$$

и значи (2) $A_1B_1||AB$. Тогава $IC_2 \perp AB$ и $C_2 = CM \cap A_1B_1$. Понеже $AC \neq BC$, то $I \notin CM$. Следователно

$$IM \perp AB \Leftrightarrow C_2 = M \Leftrightarrow \frac{AC}{3} = AB_1 = AC_1 = \frac{AB.AC}{AC+BC} \Leftrightarrow AC + BC = 3AB.$$

Критерии за оценяване. По 1.5 т. за (1) и (2), и 3 т. за довършване на решението.

Забележка. Друго решение се получава, ако се използва, че $MI \perp AB$ влече, че $AM^2 - r^2 = (p-a)^2 BM^2 - r^2 = (p-b)^2$.

Задача 12.2. Нека $k \in (0, 1/2)$ и $a_1 > 0$. Да се докаже, че редицата с общ член $a_{n+1} = ka_n + (1-k)/a_n$ е сходяща и да се намери границата ѝ.

Първо решение. Да допуснем, че не съществува n, за което $a_n \in [1, m]$, където $m = (1-k)/k > 1$. Тогава от

$$(1)\ a_{n+1} - a_n = (1-k)(1/a_n - a_n), \quad (2)\ a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)(k - (1-k)/a_n)$$

по индукция следва, че $a_2 > a_3 > \cdots > m$ и значи редицата е сходяща. За границата ѝ l имаме, че $l = kl + (1-k)/l$, откъдето $l = 1$, което е противоречие.

По-нататък можем да считаме, че (3) $a_1 \in [1, m]$. От (2) и

$$(4)\ a_{n+2} - a_n = k(1-k)(1-a_n^2)(1/a_n + 1/a_{n+1})$$

по индукция следва, че (5) $a_1 \geq a_3 \geq \cdots \geq 1$ и $a_2 \leq a_4 \leq \cdots \leq 1$. Значи тези две подредици са сходящи и от (4) заключаваме, че (6) $a_n \to 1$.

Критерии за оценяване. По 0,5 т. за (1) и (2), по 1 т. за (4) и (6), и по 1,5 т. за (3) и (5).

Второ решение. (Стефан Герджиков) Да разгледаме разликите $a_n - 1/a_n$. Директно заместване в рекурентната зависимост показва, че:

$$a_{n+1} - 1/a_{n+1} = (a_n - 1/a_n)(k - (1-k)/(ka_n^2 + 1 - k))$$

Коефициентът в скобите е между $k-1$ (при $a_n \to 0$) и k (при $a_n \to \infty$). Следователно:

$$|a_{n+1} - 1/a_{n+1}| < \max(k, 1-k)|a_n - 1/a_n|.$$

Нека $c = \max(k, 1-k) \in (0; 1)$. Оттук $|a_{n+m} - 1/a_{n+m}| < c^m|a_n - 1/a_n|$ и значи $|a_n - 1/a_n| \to 0$. Накрая от $a_{n+1} - a_n = (1-k)(a_n - 1/a_n)$ получаваме, че:

$$|a_{n+m} - a_n| = (1-k)|\sum_i a_{n+i} - 1/a_{n+i}| \le (1-k)\sum_i c^i|a_n - 1/a_n| < (1-k)/(1-c)|a_n - 1/a_n|$$

Следователно (a_n) е редица на Коши и има граница (тъй като $\mathbb{R}$ е пълно метрично пространство). Границата се смята директно.

Задача 12.3. Един след друг, А и В попълват с 0 или 1 някое непопълнено до този момент кадратче в последователност от 66 квадратчета. В печели, ако полученото накрая 66-цифрено число се дели на $\overline{111}$ във всяка бройна система. В противен случай печели А. Кой от двамата има печеливша стратегия, ако числото:

а) може да започва с 0;   б) не може да започва с 0?

Решение. Ако числото е $a_0a_1\dots a_{64}a_{65}$, то В печели, когато x^2+x+1 дели $a_0x^{65} + a_1x^{64} + \cdots + a_{64}x + a_{65}$ за всяко цяло число $x \ge 2$. Понеже x^2+x+1 дели $x^{n+3} - x^n$, това означава, че $c(x) = \dfrac{C_0x^2 + C_1 + C_2}{x^2+x+1}$ е цяло число, където

$$C_0 = a_0 + a_3 + \cdots + a_{63},\ C_1 = a_1 + a_4 + \cdots + a_{64},\ C_2 = a_2 + a_5 + \cdots + a_{65}.$$

Тъй като $|c(x) - C_0| < 1$ при $x \ge \max\{|C_1 - C_0|, |C_2 - C_0|\}$, то В печели, ако $C_0 = C_1 = C_2$.

а) В печели при следната стратегия: след попълнена от А цифра a от групата (със сума) C_i, попълва с $1-a$ цифра от същата група (накрая $C_0 = C_1 = C_2 = 11$).

б) А печели при следната стратегия: никога не попълва a_0, отначало и след ход на Б в C_0 попълва 1 в същата група (ако тя не е запълнена), а иначе попълва попълва 0 в $C_1 \cup C_2$ (накрая $C_0 \ge 12 > \min\{C_1, C_2\}$).

Критерии за оценяване. 2 т. за В печели, ако $C_0 = C_1 = C_2$, 2 т. за а) и 3 т. за б).

Задача 12.4. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува единствен полином P от степен n с реални коефициенти, за който $xP^2(x) - (P(x)-1)^2$ е нечетна функция.

Решение. Нека $P(x) = Q(x^2) + xR(x^2)$ е полином, изпълняващ условието на задачата, което ще бележим с (1). Тъй като

$$\begin{aligned} xP^2(x) - (P(x)-1)^2 = &-(Q(x^2)-1)^2 - x^2R^2(x^2) + 2x^2Q(x^2)R(x^2) \\ &+x[Q^2(x^2) + x^2R^2(x^2) - 2Q(x^2)R(x^2) + 2R(x^2)], \end{aligned}$$

това означава, че

$$(2) \quad (Q(x)-1)^2 + xR^2(x) - 2xQ(x)R(x) = 0.$$

Оттук лесно следва, че $\deg Q = \deg R$ или $\deg Q = \deg R + 1$. Значи, ако $\deg P = 2n-1$, то $\deg Q = \deg R = n-1$, а ако $\deg P = 2n$, то $\deg Q = \deg R + 1 = n$.

По-нататък ще използваме метода на безкрайното спускане.

Нека $\deg P = 2n$. От формулите на Виет следва, че $f(x) = -Q(x) + 2xR(x) + 2$ и $R(x)$ изпълняват (2), като $Q(x)f(x) = xR^2(x) - 1$. В частност, $\deg f = n-1$. Значи полиномът $g(x) = f(x^2) + xR(x^2)$ изпълнява (1), като $\deg g = 2n-1$ (защо?).

По подобен начин се вижда, че ако $\deg P = 2n-1$ и $h(x) = 2Q(x) - R(x)$, то полиномът $g(x) = Q(x^2) + xh(x^2)$ изпълнява (1), като $\deg g = 2n-2$.

Продължавайки по този път, накрая ще достигнем до константен полином P_0, изпълняващ (1), т.е. до $P_0 = 1$.

Обратно, ако $Q_0 = 1$, $R_0 = 0$,

$$Q_{2n-1} = Q_{2n-2},\ R_{2n-1} = 2Q_{2n-2} - R_{2n-2},$$

$$Q_{2n} = 2xR_{2n-1} + 2 - Q_{2n-1},\ R_{2n} = R_{2n-1},$$

то $P_n(x) = Q_n(x^2) + xR_n(x^2)$ изпълнява (1), като $\deg P_n = n$.

С това задачата е решена.

Критерии за оценяване. 2 т. за (2), 3 т. за „спускане“до $P_0 = 1$ и 2 т. за довършване на решението.

Задачите са предложени от: 9.1, 9.2 и 10.2 – Диана Данова, 9.3 – Петър Бойваленков, 10.1 и 10.3 – Иван Ланджев, 9.4, 10.4(11.4) и 11.2 – Александър Иванов, 11.1 – Емил Колев, 11.3, 12.1, 12.2, 12.3 и 12.4 – Николай Николов.