Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $x^2 + 8 = |x + a| + |x - a|$ има нечетен брой различни реални корени.

Решение. Отговор: $a = \pm 4$. Ако x_0 е решение на даденото уравнение, лесно се вижда, че и $-x_0$ е негово решение. Следователно уравнението може да има нечетен брой решения само ако $x = 0$ е негово решение. Тогава $8 = 2|a|$, откъдето необходимо условие е $a = \pm 4$. Ще докажем, че това условие е и достатъчно. При $a = \pm 4$ получаваме уравнението $x^2 + 8 = |x + 4| + |x - 4|$, което е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + 2x + 8 = 0 \\ x \leqq -4 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ -4 < x < 4 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} x^2 - 2x + 8 = 0 \\ x \geqq 4 \end{array}\right. .$$

и има единствено решение $x = 0$ с което задачата е решена.

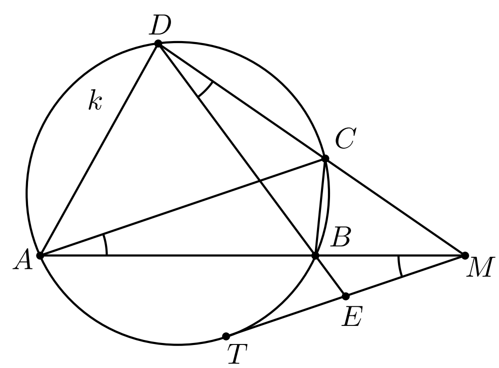
Оценяване. (6 точки) 2 т. за извода, че необходимо условие е $a = \pm 4$; 4 т. за доказателство, че това условие е и достатъчно.

Задача 9.2. Нека $ABCD$ е вписан в окръжност k четириъгълник и продълженията на страните AB и CD се пресичат в точка M. Нека MT е допирателна към k ($T \in k$) и правата BD пресича отсечката MT в точка E. Ако MT е успоредна на диагонала AC, то да се намери отношението $EM : ET$.

Решение. От $MT \parallel AC$ следва, че $\sphericalangle EMB = \sphericalangle BAC$. Но $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ и следователно $\triangle EMB \sim \triangle EDM$, т.е.

$$\frac{EB}{EM} = \frac{EM}{ED} \Rightarrow EM^2 = EB.ED.$$

От друга страна, от свойството на секущите следва, че $ET^2 = EB.ED$. Тогава $EM = ET$, което означава, че търсеното отношение е 1.



Оценяване. (6 точки) 2 т. за $\triangle EMB \sim \triangle EDM$; 1 т. за $EM^2 = EB.ED$; 2 т. за $ET^2 = EB.ED$; 1 т. за $EM : ET = 1$.

Задача 9.3. Фигурата, получена от квадрат 2×2 след премахването на една негова клетка се нарича *триклетъчен ъгъл.* Възможно ли е клетките на една шахматна дъска с размери 3000×3000 да бъдат оцветени в бяло и черно по такъв начин, че както и да се разреже тази дъска на 3 000 000 триклетъчни ъгъла, всеки от тях да съдържа точно по една черна клетка?

Решение. Отговор: Не!

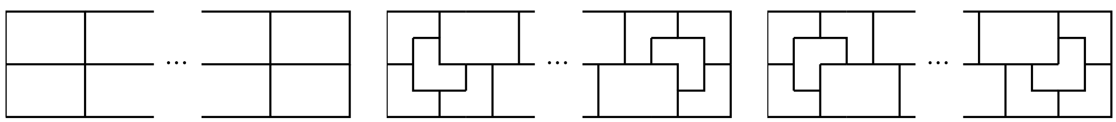
Да допуснем противното. Оцветяването трябва да съдържа точно три милиона черни клетки.

Да разрежем дъската на 1500^2 квадратчета 2×2. Да допуснем, че всяко от тези квадратчета, което не граничи с ръба на дъската, съдържа най-много една черна клетка. Тогава имаме общо не повече от $1498^2 + 4 \times 1499 \times 4 < 3\,000\,000$ черни клетки: противоречие.

Да разгледаме едно "вътрешно" квадратче s, което съдържа поне две черни клетки. Нека S е правоъгълника с размери 4×3000, съставен от квадратчето s, всички други квадратчета 2×2 в същите два реда, и всички квадратчета 2×2 в следващите два реда.

Частта от дъската, която лежи извън S, можем да разрежем на хоризонтални правоъгълници 2×3, а следователно и на триклетъчни ъгли.

Правоъгълникът S, от друга страна, можем да разрежем на триклетъчни ъгли и правоъгълници 2×3 по следните три начина:



Лесно се вижда, че в поне един от тях разрязването ще може да се довърши по такъв начин, че двете черни клетки от s да попаднат в един и същи триклетъчен ъгъл: противоречие.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за наблюдението, че има квадратче 2×2, което съдържа две черни клетки; 5 т. за доказателството, че има разрязване, едно от ъгълчетата в което съдържа тези две черни клетки.

Задача 9.4. Да се реши в естествени числа уравнението $x^3 - 5x + 28 = 2^y(2^y + 1)$.

Решение. Да разгледаме уравнението по модул 7. Лявата страна може да дава остатъци 0, 2, 3, 4 и 5, а дясната 2 и 6. Следователно и двете страни дават остатък 2 при деление на 7, като това може да се случи само когато y се дели на 3. Нека $y = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, и да запишем уравнението във вида

$$x^3 - 4^{3k} = 2^{2k} + 5x - 28 \iff (x - 4^k)(x^2 + 4^k x + 4^{2k}) = 2^{3k} + 5x - 28.$$

Ако $x < 4^k$, лявата страна е отрицателна и значи $0 > 2^{3k} + 5x - 28 \geq 5x - 20$, откъдето $x < 4$. Непосредствена проверка за $x = 1, 2, 3$ не дава решения.

Ако $x > 4^k$, лявата страна е поне $x^2 + 4^k x + 4^{2k} \geq x^2 + 4x + 2^{4k} > 5x + 2^{3k} > 2^{3k} + 5x - 28$.

Остава случаят $x = 4^k$, при който получаваме $2^{3k} + 5.4^k = 28$, което очевидно е изпълнено само при $k = 1$. Следователно $x = 4$ и $y = 3$ е единственото решение.

Забележка. Оказва се, че в множеството на целите числа уравнението има същите решения - виж 10.4.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за разглеждане на уравнението по модул 7 (или друг модул, който да води до извода, че y се дели на 3); 1 т. за $3|y$; 1 т. за преобразованието; по 1 т. за случаите $x < 4^k$, $x > 4^k$ и $x = 4^k$.