Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Първо контролно за определяне на националния отбор за МБОМ 2023

Условия, решения и критерии за оценяване

Задача 1. Изпъкналият петоъгълник $ABCDE$ е такъв че $BC = DE$, $BE \parallel CD$ и $AB \parallel DE$. Ако окръжността през средите на отсечките BD, CE и AE се допира до AE, то да се докаже, че $ABCDE$ е вписан в окръжност.

Решение. Понеже $BC = DE$ и $BE \parallel CD$, следва, че $BCDE$ е равнобедрен трапец и е вписан в окръжност. Така свеждаме до вписаността на $ABCE$. Нека M, N и P са средите съответно на BD, CE и AE. От допирането имаме $\angle NMP = \angle NPE$, от средната отсечка NP в триъгълника ACE имаме $\angle CAE = \angle NPE$, а от друга страна $MP \parallel AB$ (по условие $AB \parallel DE$ и така MP е средна основа в трапеца/успоредника $ABDE$) и $MN \parallel BE$ (понеже MN лежи на средната основа на трапеца $BCDE$), откъдето $\angle ABE = \angle ABD - \angle DBE = \angle PMD - \angle NMD = \angle NMP$. Следователно $\angle ABE = \angle NMP = \angle NPE = \angle CAE$. Остава да съобразим, че $\angle ABE = \angle DEB$ (от $AB \parallel DE$) и $\angle DEB = \angle CBE$ (от равнобедрения $EBCD$) и така окончателно $\angle CAE = \angle CBE$, с което задачата е решена.

Оценяване. (10 точки) 1 т. за вписаността на $BCDE$, 1 т. за свеждане до вписаността на $ABCE$ (или $ABDE$), 1 т. за $MN \parallel BE$, 1 т. за $MP \parallel AB$, 1 т. за $\angle NMP = \angle EPN$, 1 т. за $\angle NMP = \angle ABE$, 1 т. за $\angle EPN = \angle CAE$, 1 т. за $\angle ABE = \angle DEB$ и 2 т. за довършване.

Задача 2. Неотрицателните реални числа a, b и c са такива, че $ab+bc+ca = 3$. Да се намери най-голямата възможна стойност на израза

$$\frac{27\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{(a+b+c)^3} - \frac{a+3}{b+c} - \frac{b+3}{a+c} - \frac{c+3}{a+b}$$

както и всички тройки (a, b, c), при които тя се достига.

Отговор. 3 и се достига само при $a = b = c = 1$

Решение. Не е възможно $a = b = c = 0$ (иначе $ab+bc+ca = 0$), така че всички знаменатели, с които работим, са положителни. При $a = b = c = 1$ получаваме стойност 3. Ще докажем, че $\frac{a+3}{b+c} + \frac{b+3}{a+c} + \frac{c+3}{a+b} + 3 \geq \frac{27\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{(a+b+c)^3}$. Лявата страна е равна на $\frac{a+b+c+3}{b+c} + \frac{a+b+c+3}{a+c} + \frac{a+b+c+3}{a+b} = (a+b+c+3)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right)$ и значи от версията на неравенството на Коши-Буняковски-Шварц, известна като *Хубаво неравенство* (или от неравенството между средноаритметично и средноехармонично) получаваме, че тази лява страна е по-голяма или равна на $\frac{9(a+b+c+3)}{2(a+b+c)}$. Да положим $a+b+c=S$. Понеже $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 = S + 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right) \leq S+(a+b)+(b+c)+(c+a)=3S$, остава да обосновем, че $\frac{9(S+3)}{2S} \geq \frac{81S}{S^3}$, т.е. $S(S+3) \geq 18$, което е еквивалентно на $S \geq 3$. За целта е достатъчно да съобразим, че $\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca$ (поради еквивалентното $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$) и да използваме даденото в условието $ab+bc+ca=3$. Равенство се достига само при $a=b=c$, което заедно с $ab+bc+ca=3$ налага $a=b=c=1$.

Оценяване. (10 точки) 1 т. за напълно верен отговор (стойност 3 и тройката $(1,1,1)$), 2 т. за разглеждане на $(a+b+c+3)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$, 1 т. за обосновка на $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$, 1 т. за целта всичко да се изрази или ограничи чрез $S=a+b+c$, 2 т. за $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \leq 3S$, 1 т. за окончателно свеждане до $S \geq 3$ и 2 т. за довършване.

Задача 3. Намерете всички естествени числа a, b, c и прости числа p и q, такива че:

- c не се дели на 4 и p не дава остатък 11 при деление на 16;
- изпълнено е равенството $p^a q^b - 1 = (p+4)^c$.

Отговор. $a=b=c=1$, $q=2$, $p=5$

Решение. Явно $p \geq 3$ и $q=2$ от съображения за четност. Ще използваме разлагането $X^t+Y^t=(X+Y)(X^{t-1}-X^{t-2}Y+\cdots-XY^{t-2}+Y^{t-1})$ за нечетно естествено число t. Разглеждаме два случая – ако c е нечетно и ако $c \equiv 2 \pmod{4}$.

- Нека c е нечетно. Тогава

  $$2^b p^a = (p+4)^c + 1 = (p+5)\left((p+4)^{c-1} - (p+4)^{c-2} + \cdots - (p+4) + 1\right)$$

  се дели на $p+5$. Ако $p \neq 5$, то числата p и $p+5$ са взаимнопрости и $p+5$ дели 2^b – значи $p=5$ или $p+5$ е степен на двойката. Но при $p=2^k-5$ за $k \geq 4$ бихме имали, че $p-11=2^k-16$ се дели на 16, противоречие; значи $k=3$, т.е. $p=3$.

  – При $p=3$ имаме $2^b 3^a = 7^c + 1$, което е невъзможно по модул 3.

– При $p=5$ имаме $2^b5^a-9^c=1$. При $b\geq 2$ получаваме противоречие по модул 4, а при $a\geq 2$ имаме $9^c+1\equiv 0 \pmod{25}$ и пресмятания до $9^{10}\equiv 1 \pmod{25}$ показват, че c се дели на 5 – но тогава $9^c+1=(9^5+1)(9^{c-5}-9^{c-10}+\ldots-9^5+1)$ се дели на $\frac{9^5+1}{50}=1181$, докато 2^a5^b не може да има такъв делител. Оттук $a=b=1$, съответно $c=1$.

- Нека c е четно и $\frac{c}{2}$ е нечетно. Имаме, че $2^bp^a=(p+4)^c+1=\left((p+4)^2\right)^{\frac{c}{2}}+1$ се дели на $(p+4)^2+1$. Ако $p\neq 17$, то числата p и $(p+4)^2+1$ са взаимнопрости и тогава $(p+4)^2+1>2$ би било степен на 2, което обаче е невъзможно по модул 4. Следователно $p=17$, но тогава $(p+4)^2+1=442=2\cdot 13\cdot 17$ се дели на 13, докато 17^a2^b – не, противоречие. Така в този случай уравнението няма решение.

Оценяване. (10 точки) Общо 1 т. за верен отговор и $p\geq 3$ с $q=2$, 5 т. за случая на нечетно c, от които 1 т. за разглеждане на делителя $p+5$, 1 т. за свеждането до $p=5$ или $p+5$ да е степен на 2, 1 т. за отхвърляне на $p+5$ да е степен на 2 и 2 т. за случая $p=5$, от които по 1 т. за отхвърляне на $a\geq 2$ и $b\geq 2$; 4 т. за случая $c\equiv 2 \pmod 4$, от които 1 т. разглеждане на делителя $(p+4)^2+1$, 1 т. за свеждането до $p=17$ или $(p+4)^2+1$ да е степен на двойката и по 1 т. за отхвърляне на всеки от двата случая

Задача 4. Дадено е множество от $n\geq 5$ души и m различни тричленни комисии сред тези хора. Няма две комисии с точно един общ участник. Намерете най-голямото възможно m (в зависимост само от n).

Отговор. Ако $n=4k$ или $n=4k+1$ или $n=4k+2$ за цяло k, то максимум $m=4k$. Ако $n=4k+3$ за цяло k, то максимум $m=4k+1$.

Решение. Ако $n=4k$ или $n=4k+1$ или $n=4k+2$ за цяло k, разпределяме хората на групи по 4 и образуваме 4 различни комисии от всяка група, което дава пример за $m=4k$.

Ако $n=4k+3$ за цяло k, разпределяме хората на групи по 4 и образуваме 4 различни комисии от всяка, плюс група от 3, съставяща една комисия. Това дава пример за $m=4k+1$.

Ще покажем, че тези стойности не могат да бъдат надминати. Двама души в един комитет ще наричаме *колеги*.

(i) Нека има двамина A,B, участващи заедно в $a\geq 3$ комисии. Ще докажем, че единствената възможна комисия t, включваща колега C на A и B (различен от A,B), е $\{A;B;C\}$. Наистина, тъй като C е общ член на t и $\{A;B;C\}$, то има и втори общ член, да речем A. Нека третият член на t е $D\neq B$. Тъй като $a\geq 3$, има комисия $\{A;B;E\}$, за която $E\neq C$, $E\neq D$. Така комисиите $\{A;B;E\}$ и $\{A;C;D\}$ имат точно един общ член: противоречие. Твърдението ни е доказано. Заключаваме, че има a колеги на A или B (а всъщност и на двамата), различни от A, B. Нека изгоним A, B и колегите им; броят на хората намалява с $a+2$, а този на комисиите – с a. Повтаряме процедурата (i), докато няма повече двойки от хора, участващи заедно в 3 или повече комисии.

(ii) Нека сега има двама души A, B, принадлежащи на точно 2 комисии, например $\{A; B; C\}$ и $\{A; B; D\}$. Тогава единствените други комисии, включващи C и D, могат да са само $\{A; C; D\}$ и $\{B; C; D\}$. Наистина, ако например C има колега E, различен от A, B, D, то комисията с C, E трябва да има втори общ член с $\{A; B; C\}$ – без ограничение считаме, че тази комисия е $\{A; C; E\}$. Но тогава $\{A; C; E\}$ и $\{A; B; D\}$ имат точно един общ член: противоречие. Нека изгоним A, B, C, D; броят и на хората, и на комисиите намалява с 4. Повтаряме процедурата (ii), докато няма повече двойки от хора, участващи заедно в 2 комисии.

(iii) Ако останат още хора, всеки от тях участва в само една комисия (понеже ако две комисии имат общ член, те имат и втори такъв). Ако премахнем такава комисия, броят на хората намалява с 3, а този на комисиите – с 1. Повтаряме процедурата (iii), докато няма повече комисии (хора може и да останат).

Ако до края сме прилагали само (ii), то общият брой комисии не надхвърля общия брой хора. Ако сме прилагали поне веднъж (i) или (iii), то общият брой комисии не надхвърля общия брой хора, намален с 2. Следователно:

- ако $n = 4k$, броят на комисиите е не повече от $4k$;
- ако $n = 4k + 1$, то или сме приложили (i) или (iii) поне веднъж, или в края е останал поне един човек, така че броят комисии е не повече от $4k$;
- ако $n = 4k + 2$, то или сме приложили (i) или (iii) поне веднъж, или в края са останали поне двама, така че броят комисии е не повече от $4k$;
- ако $n = 4k + 3$, то или сме приложили (i) или (iii) поне веднъж, или в края са останали поне трима, така че броят комисии е не повече от $4k + 1$.

Доказателството е завършено.

Оценяване. (10 точки) При $n = 4k$: 1 т. за обоснован пример и 2 т. за доказана оценка. При $n = 4k + 1$: общо 2 т. за цялостно завършване (отговор, пример и оценка). При $n = 4k + 2$: общо 2 т. за цялостно завършване (отговор, пример и оценка). При $n = 4k + 3$: 1 т. за обоснован пример и 2 т. за доказана оценка.