Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Второ контролно за определяне на националния отбор за МБОМ 2023

Условия, решения и критерии за оценяване

Задача 5. Да се намерят всички реални числа x, y и z, такива че $x^4+y^3z = zx$, $y^4 + z^3x = xy$ и $z^4 + x^3y = yz$.

Отговор. $x = y = z \in \left\{0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Решение. Ако някое от числата x, y и z е 0, да речем x, то от второто уравнение следва $y = 0$ и сега третото дава $z = 0$. Нека $x, y, z \neq 0$. От първото уравнение следва $z(x - y^3) = x^4$, а от второто следва $y(x - y^3) = z^3x$. Оттук след делене получаваме $\frac{z}{y} = \frac{x^3}{z^3}$, т.е. $z^4 = x^3y$. Аналогично $x^4 = y^3z$. Замествайки $z = \frac{x^4}{y^3}$ в другото уравнение, получаваме $y^{13} = x^{13}$, откъдето $x = y$ и $z = \frac{x^4}{y^3} = x$. При $x = y = z$ остава да решим $2x^4 = x^2$, което е с корени 0 и $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оценяване. (10 точки) 1 т. за верен отговор, 1 т. за пълен анализ на случая с променлива 0, 1 т. за пълен анализ на случая $x = y = z \neq 0$, 7 т. за доказване на необходимостта на $x = y = z \neq 0$ (от които 4 т. за получаване на $z^4 = x^3y$ или подобно помощно уравнение, от което с цикличните му варианти лесно следва $x = y = z$)

Задача 6. Да се намери най-малкото естествено число $n \geq 2$, за което mn дели $m^{2023} + n^{2023} + n$ за поне едно естествено число m.

Отговор. 2^{2023}

Решение. Да запишем $m = da$ и $n = db$, където $d = \text{НОД}(m, n)$, т.е. $\text{НОД}(a, b) = 1$. Исканото е еквивалентно (след съкращаване на d) на $dab \mid d^{2022}a^{2023} + d^{2022}b^{2023} + b$. Делимото трябва да се дели на b, значи $b \mid d^{2022}a^{2023}$ и понеже $\text{НОД}(a, b) = 1$, следва $b \mid d^{2022}$. Делимото трябва да се дели и на d, откъдето $d \mid b$. Така dab се дели на d^2, значи делимото се дели на d^2 и оттук $d^2 \mid b$. По-общо, да забележим, че ако $d^k \mid b$ за някое $k \leq 2021$, то dab се дели на d^{k+1}, значи делимото се дели на d^{k+1}, съответно $d^{k+1} \mid b$.

Така достигаме до $d^{2022} \mid b$. Значи непременно $b = d^{2022}$, т.е. $n = d^{2023}$, откъдето (понеже $n \geq 2$) следва $n \geq 2^{2023}$. Обратно, при $d = 2$ и $b = 2^{2022}$ искаме $2^{2023}a \mid 2^{2022}a^{2023} + 2^{2022} \cdot 2^{2022\cdot 2023} + 2^{2022}$, т.е. $2a \mid a^{2023} + 2^{2022\cdot 2023} + 1$ за някое нечетно a. Понеже делимото е четно, достатъчно е $a \mid 2^{2022\cdot 2023} + 1$, съответно $a = 2^{2022\cdot 2023} + 1$ (и $m = 2^{2022\cdot 2023+1} + 2$) върши работа. (Друг възможен избор тук е $a = 5$, т.е. $m = 10$.)

Оценяване. (10 точки) 1 т. за верен отговор, 1 т. за фокусиране върху $d =$ НОД(m, n) и НОД$(a, b) = 1$, 1 т. за $b \mid d^{2022}$, 1 т. за $d^2 \mid b$, 2 т. за скок към $d^{2022} \mid b$, 2 т. за заключението $n \geq 2^{2023}$, 1 т. за деклариране на работещо m при $n = 2^{2023}$ и 1 т. за проверка, че работи

Задача 7. Има много кутии; в една от тях има n топчета, а останалите са празни. Има и бял лист. На всеки ход се пресипват част от топчетата от някоя непразна кутия в някоя празна и на листа се записва произведението на бройките топчета в тези две кутии след пресипването. След няколко хода сборът от числата на листа станал 2023. Намерете най-малкото възможно n.

Решение. Нека на втори лист записваме полусбора на квадратите на бройките числа в кутиите, като при всеки ход изтриваме полусбора от предишния ход. Когато кутия с $a+b$ топчета се разпределя в кутии с a и b топчета, удвоеният сбор от числата на двата листа се променя с

$$2ab + a^2 + b^2 - (a+b)^2 = 0,$$

т.е. е постоянен. Първоначално този удвоен сбор е $2.\frac{n^2}{2} + 0 = n^2$, а в края е $2.2023 + S$, където S е сборът от квадратите на няколко естествени числа, чиято сума е n, в частност $S \geq n$. Оттук $n^2 \geq 2.2023 + n$, т.е. $n(n-1) \geq 4046$. Най-малкото такова естествено число е 65. Остава да покажем, че при $n = 65$ е възможно да постигнем сбор 2023 на първия лист. За целта удвоеният резултат на втория лист трябва да е станал $65^2 - 4046 = 179$. Това е възможно например ако в една кутия има 11 топчета, в две кутии – по 2 топчета, а останалите $65 - 11 - 2 - 2 = 50$ топчета са по едно в кутия: $11^2 + 2.2^2 + 50 = 179$.

Оценяване. (10 точки) 2 т. за откриване на работещ инвариант; 3 т. за доказване, че $n \geq 65$; 5 т. за пример при $n = 65$.

Задача 8. Даден е остроъгълен неравнобедрен триъгълник ABC с ортоцентър H, височина CD ($D \in AB$) и описана окръжност k. Окръжността ω с диаметър CH пресича k за втори път в точката P. Правите AP и BP пресичат ω за втори път в точките K и L, а правите DK и DL пресичат ω за втори път в точките S и T. Да се докаже, че $KL = ST$.

Решение. Без ограничение считаме $AC < BC$. Започваме с известния факт, че симетричната точка Q на H относно средата M на страната AB лежи на k и е диаметрално противоположна на C – така понеже $\angle CPH = \angle CPQ = 90°$, получаваме, че P, H, M и Q лежат на една права.

Нататък, нека A_1 и B_1 са петите на височините през върховете A и B, съответно – явно A_1 и B_1 лежат на ω и ще докажем, че $S \equiv B_1$ (и аналогично ще следва $T \equiv A_1$). За целта ще докажем, че точките D, B_1 и K лежат на една права. Имаме $\angle AB_1D = \angle AHD = \angle ABC$ и $\angle KB_1C = \angle KHC =$

$90^\circ - \angle KCH = 90^\circ - \angle KPH = 90^\circ - \angle APQ = 90^\circ - \angle ABQ = \angle CBQ - \angle ABQ = \angle ABC$ и желаната колинеарност следва.

Остава да докажем, че $A_1B_1 = KL$. Имаме $\angle A_1CH = 90^\circ - \angle ABC = \angle KPH$ (второто от предния абзац) и значи $\widehat{HA_1} = \widehat{HK}$ в ω; аналогично $\widehat{HB_1} = \widehat{HL}$ и събирането на двете води до $\widehat{A_1B_1} = \widehat{KL}$, а оттук и до $A_1B_1 = KL$.

Оценяване. (10 точки) 1 т. за въвеждането на Q и M, 1 т. за колинеарността на P, H, M и Q, 1 т. за поне едно от предположенията $S \equiv B_1$ и $T \equiv A_1$ и 3 т. за доказването му, 2 т. за доказателство на $\widehat{HK} = \widehat{HA_1}$ (или на $\widehat{HL} = \widehat{HB_1}$) в ω, 2 т. за довършване