# Министерство на образованието и науката
# Съюз на математиците в България

---

## Трето контролно за определяне на националния отбор за МБОМ 2023

### Условия, решения и критерии за оценяване

**Задача 9.** На дъската са записани в червено всички прости числа, по-малки или равни на $n$, а в синьо са записани всички възможни суми на две различни червени числа. За кои естествени $n \geq 3$ произведението на всички сини числа се дели на произведението на естествените числа от 1 до $n$ включително?

*Отговор.* 7

*Решение.* Нека първо $n \geq 11$ и нека $r \geq 11$ е най-голямото просто число, по-малко или равно на $n$. Тогава $r$ дели произведението на сините числа и значи непременно дели някое събираемо от вида $p+q$, където $p$ и $q$ са различни прости числа, ненадминаващи $n$. От максималността на $r$ имаме $\frac{p+q}{2} < r$, следователно $r = p+q$ и тъй като $r$ е нечетно, то непременно някое от $p$ и $q$ е 2 – в частност, $r-2$ е просто число. Това число също дели някое събираемо от вида $x+y$ за различни прости $x < y \leq n$. Тъй като $x+y \leq 2r-2$, то $r-2 \leq \frac{x+y}{3} \leq \frac{2r-2}{3}$ е невъзможно. При $r-2 = \frac{x+y}{2}$ няма как $x = r-2$, $y = r$ (или наобратно), значи трябва $x \leq y-2 \leq r-4$ (има поне две прости числа между 3 и $r-2$ включително, като всичките са нечетни), което дава $\frac{x+y}{2} \leq y-1 \leq r-3$, противоречие. Така единствената възможност е $x+y = r-2 \geq 9$ и тъй като $r-2$ е нечетно, то някое от $x$ и $y$ е 2 и значи $r-4$ също е просто число.

Оттук $r$, $r-2$ и $r-4$ са прости числа, което е невъзможно за $r \geq 11$ понеже $r-2 > r-4 > 3$, но поне едно от $r-2$ и $r-4$ се дели на 3. Така $n \leq 10$.

При $n \geq 7$ червените числа са 2, 3, 5 и 7 и сините са 5, 7, $3^2$, $2^3$, $2 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3$, с произведение $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, съответно $n \geq 8$ не работят ($8!$ се дели на $2^7$), а $n = 7$ е решение понеже $7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. При $3 \leq n \leq 6$ няма синьо число, което се дели на 3, докато $n!$ се дели на 3, значи тези не работят.

**Оценяване.** (10 точки) 1 т. за верен отговор, 2 т. за проверка на всички $n \leq C$, където $C \geq 10$ е константа, 1 т. за разглеждане на $r$, 2 т. за доказателство, че $r-2$ е просто число, 2 т. за доказателство, че $r-4$ е просто число и 2 т. за доказателство, че няма как $r$, $r-2$ и $r-4$ да са прости числа при $r \geq 11$.

**Задача 10.** По брега на кръгъл остров без шосета има осем различни града. Трябва да се построят пет прави двупосочни шосета, които да не се пресичат, така че от всеки град да тръгват едно или две шосета. По колко начина може да стане това?

*Отговор.* 476

*Решение.* Нека има $x$ града с по 1 шосе и $y$ с по две. Тогава $x + y = 8$ и $x + 2y = 10$, така че $y = 2$, $x = 6$. Тръгваме от град с 1 шосе. Ако стигнем до град с две шосета, продължаваме по второто. Продължаваме така, докато стигнем до друг град с 1 шосе. След това правим същото с трети град с едно шосе, а след това и с пети. Получаваме три несвързани помежду си несамопресичащи се маршрута.

Ако дадени 3 града трябва да се свържат с маршрут от 2 шосета, за това има 3 варианта.

Ако дадени 4 града трябва да се свържат с маршрут от 3 шосета, така че от всеки град да излизат 1 или 2 шосета, за това има 8 варианта. Наистина, ако двата града с по 1 шосе са съседни по кръга (4 избора), то маршрутът между тях е еднозначно определен; ако двата града с по 1 шосе са несъседни (2 избора), то за маршрута между тях има 2 избора; общо $4 + 2.2 = 8$.

Ще наричаме два града *съседни*, ако можем да минем от единия до другия по брега на острова, без да преминаваме през други градове. Ще наричаме два маршрута *съседни*, ако можем да изберем два съседни града, по един от всеки маршрут. Има два случая:

*Случай А.* Всеки два от трите маршрута са съседни.

• Ако те включват съответно 3, 3, 2 града, то има 8 избора за последния и после $3.3 = 9$ избора за първите.

• Ако те включват съответно 4, 2, 2 града, то има 8 избора за кои градове да са в първия и 8 начина за свързването им.

Общо $8.9 + 8.8 = 136$ варианта.

*Случай Б.* Има два несъседни маршрута. Нека третият маршрут е $c$.

• Може $c$ да има 2 града (4 избора), а двата несъседни – по 3 града ($3.3 = 9$ избора).

• Може някой от двата да има 2 града (8 избора), а другият и $c$ – по 3 града (2 избора за градовете на $c$ и $3.3 = 9$ начина за свързване).

• Може $c$ да има 4 града ($4 + 8 = 12$ избора за градовете и 8 начина за свързването им), а двата несъседни – по 2 града (единствен избор).

• Може някой от двата да има 4 града (8 избора за градовете и 8 начина за свързване), а другият и $c$ – по 2 града (единствен избор).

Общо $4.9 + 8.2.9 + 12.8 + 8.8 = 340$ варианта.

Окончателно търсеният брой е $136 + 340 = 476$.

**Оценяване.** (10 точки) 1 т. за $x = 2$ и $y = 6$, 2 т. за разделяне на три независими маршрута, 2 т. за получаване на броя при съседни маршрути и 4 т. за получаване на броя при наличие на несъседни маршрути (по 1 т. за всеки от шестте подслучая), 1 т. за окончателен отговор

**Коментар.** Отговорът на аналогичната задача с $n$ града и $n-3$ маршрута е $\frac{2^{n-12}}{90}n(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)(n+2)(n+9)$.

**Задача 11.** Даден е неравнобедрен триъгълник $ABC$ с описана окръжност $k$, център $I$ на вписаната окръжност и център $I_C$ на външновписаната окръжност срещу върха $C$. Точката $M$ е средата на страната $AB$, а точката $N$ е средата на дъгата $\widehat{AB}$ от $k$, която съдържа $C$. Да се докаже, че $\angle IMI_C + \angle INI_C = 180^\circ$.

*Решение.* Нека $L$ е средата на дъгата $\widehat{AB}$, несъдържаща $C$; явно $L$, $M$ и $N$ лежат на диаметър на $k$. Имаме $\angle LIB = 180^\circ - \angle BIC = \frac{\angle ACB + \angle ABC}{2} = \angle ABL + \angle ABI = \angle LBI$, откъдето $LB = LI$; аналогично $LA = LI$. Предвид $\angle IBI_C = 90^\circ$ (тъй като $BI$ и $BI_C$ са ъглополовящи на съседни ъгли), получаваме $LA = LB = LI = LI_C$.

Тъй като $LN$ е диаметър на $k$, то $\angle NBL = 90^\circ = \angle LMB$, откъдето $\triangle LBM \sim \triangle LNB$ и $LB^2 = LM \cdot LN$. Така $LI^2 = LM \cdot LN$ и заедно с $\angle ILM = \angle NLI$ получаваме $\triangle LIM \sim \triangle LNI$, съответно $\angle LIM = \angle LNI$. Имаме и $LI_C^2 = LM \cdot LN$ и заедно с $\angle LI_CN = \angle I_CNL$ следва $\triangle LI_CM \sim \triangle LNI_C$, съответно $\angle LI_CM = \angle LNI_C$. Следователно $\angle IMI_C = 180^\circ - \angle LIM - \angle LI_CM = 180^\circ - \angle LNI - \angle LNI_C = 180^\circ - \angle INI_C$, както се искаше.

**Оценяване.** (10 точки) 1 т. за въвеждането на $L$ и това, че $L$, $M$ и $N$ лежат на една права, 1 т. за $LA = LB = LI = LI_C$ (може без доказателство, ако се цитира ясно), по 2 т. за всяко от подобията $\triangle LBM \sim \triangle LNB$, $\triangle LIM \sim \triangle LNI$ и $\triangle LI_CM \sim \triangle LNI_C$, 2 т. за завършване

**Задача 12.** Нека $n$ е естествено число. Първоначално на дъската е записано $n$ пъти числото 2. За един ход избираме две числа $a$ и $b$ на дъската, изтриваме ги и на тяхно място записваме числото $\sqrt{\dfrac{ab+1}{2}}$. След $n-1$ хода на дъската остава едно число.

а) Да се докаже, че без значение какви са били ходовете, оставащото число ще е винаги по-голямо или равно на $\sqrt{\dfrac{n+3}{n}}$.

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много $n$, за които равенство в а) не се достига без значение какви са ходовете, както и че съществуват безбройно много $n$, за които равенство в а) се достига при подходящ избор на ходовете.

*Решение.* а) Разсъждаваме индуктивно по $n$. При $n = 1$ имаме само едно число и то е $2 = \sqrt{\frac{1+3}{1}}$. Да допуснем, че твърдението е вярно за всички $n < k$, където $k \geq 2$ е естествено число, и ще го докажем за $n = k$. Нека $u$ и $v$ са числата, останали на дъската след $k-2$ операции. Тогава числото след последния ход е $\sqrt{\frac{uv+1}{2}}$ и целим да докажем, че $\frac{uv+1}{2} \geq 1+\frac{3}{k}$, т.е. $uv \geq 1+\frac{6}{k}$.

Разглеждайки редицата от операции, които водят до $u$ и $v$, виждаме, че $u$ е получено от някакво множество от $1 \leq t \leq k-1$ двойки чрез верига от $t-1$ операции, както и че $v$ е получено от останалите $k-t$ двойки чрез верига от $k-t-1$ операции. Така от индукционното допускане получаваме $u \geq \sqrt{1+\frac{3}{t}}$ и $v \geq \sqrt{1+\frac{3}{k-t}}$ и вече е достатъчно да докажем, че $\sqrt{\left(1+\frac{3}{t}\right)\left(1+\frac{3}{k-t}\right)} \geq 1+\frac{6}{k}$. Повдигане на квадрат, освобождане от знаменател и опростяване води до еквивалентното $(k-2t)^2 \geq 0$, което е вярно. С това индукцията е завършена.

б) Необходимо условие за равенство при $n=k \geq 2$ в а) е $k=2t$; в частност $n$ трябва да е четно, т.е. при нечетен брой двойки в началото няма как да достигнем равенство.

От друга страна, същото необходимо условие за равенство предполага, че равенство може да се достигне когато $n$ е степен на 2 – нека докажем това. При $n=2^s$ разсъждаваме индуктивно по $s \geq 0$. При $s=0$ имаме само едно число и то е $2=\sqrt{\frac{1+3}{1}}$. Сега ако допуснем, че имаме възможна поредица от ходове за $s-1$, то при дадени $2^s$ двойки ги разбиваме на две групи по $2^{s-1}$ двойки. За всяка от групите прилагаме операциите, които водят до резултат $\sqrt{1+\frac{3}{2^{s-1}}}$ (такива има съгласно индукционната хипотеза) и накрая прилагаме операцията за оставащите две числа, които са равни на $\sqrt{1+\frac{3}{2^{s-1}}}$, с което получаваме като краен резултат $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{1+\frac{3}{2^{s-1}}}\right)^2+1}{2}}=\sqrt{1+\frac{3}{2^s}}=\sqrt{\frac{n+3}{n}}$, както се искаше.

**Оценяване.** (10 точки) 5 т. за а), от които 2 т. за идея със силна индукция, в която се разглеждат последните две числа и 3 т. за нейното реализиране; 5 т. за б), от които 2 т. за отхвърляне на безбройно много $n$ и 3 т. за доказателство за други безбройно много $n$