Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Да се докаже, че ако a, b, c, d са положителни числа, такива че

$$\frac{abc}{a+b+c} = \frac{abd}{a+b+d} = \frac{acd}{a+c+d} = \frac{bcd}{b+c+d},$$

то $a = b = c = d$.

Решение. От дадените равенства получаваме

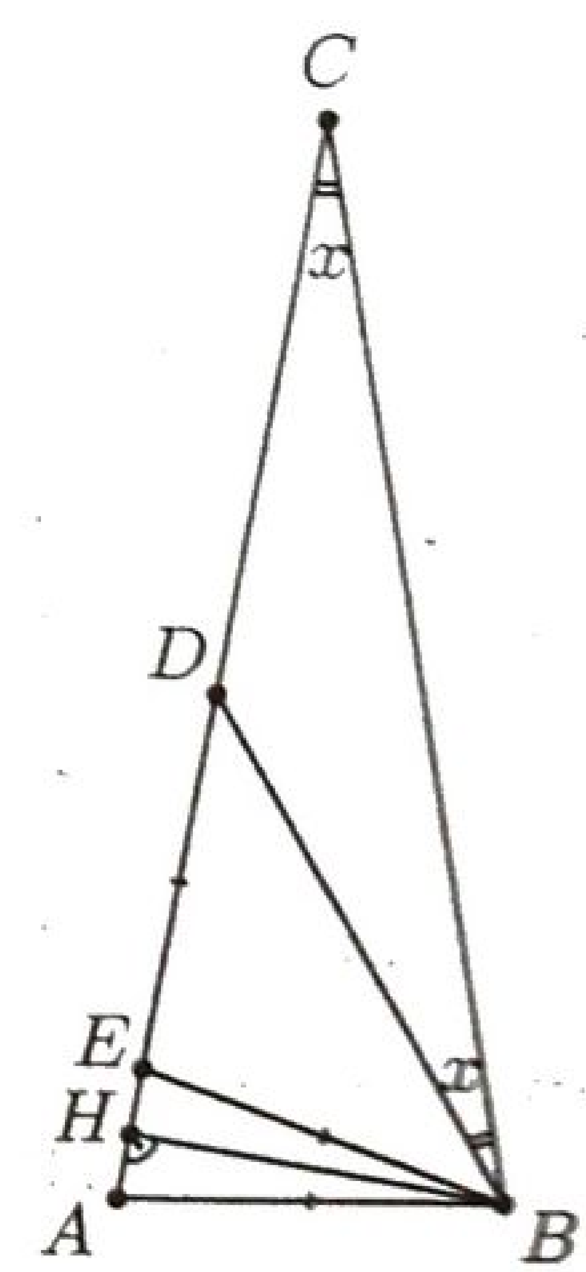
$$\frac{abcd}{(a+b+c)d} = \frac{abcd}{(a+b+d)c} = \frac{abcd}{(a+c+d)b} = \frac{abcd}{(b+c+d)a},$$

откъдето $(a+b+c)d = (a+b+d)c = (a+c+d)b = (b+c+d)a$. От първите две равенства получаваме $(a+b)d = (a+b)c$; понеже $a+b > 0$, то $c = d$. Останалите равенства следват аналогично.

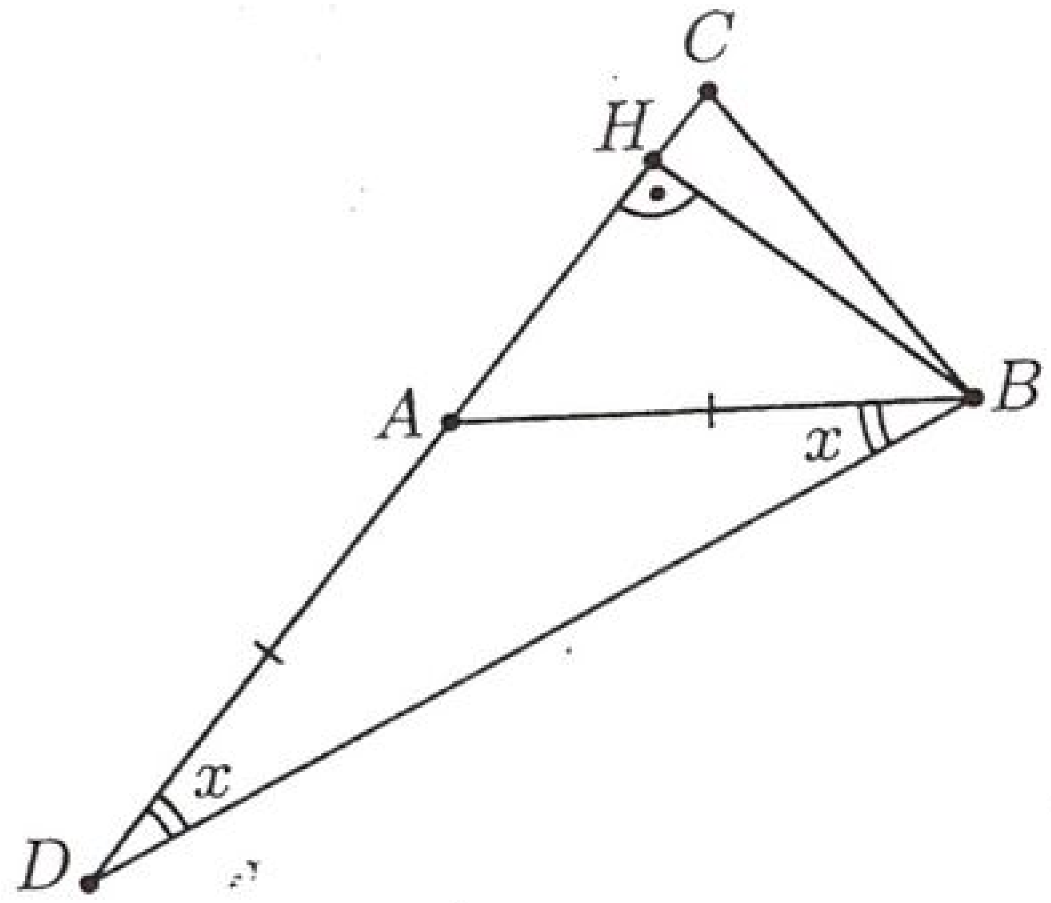
Оценяване. (6 точки) 2 т. за свеждане до линейни равенства; 2 т. за $c = d$; 2 т. за довършване на решението.

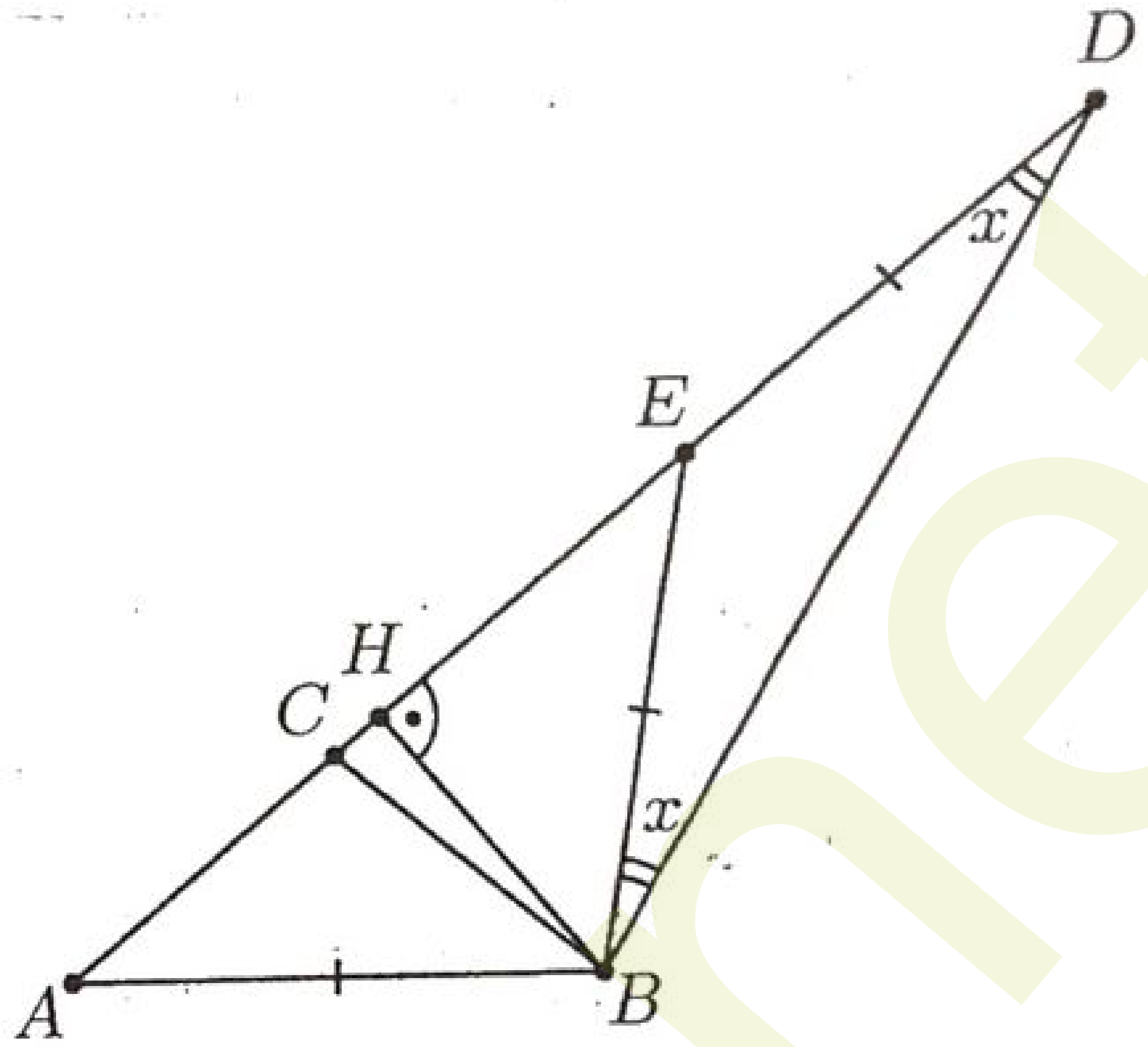
Задача 8.2. Отсечката BH е височина за равнобедрения $\triangle ABC$, $AC = BC$. Симетралата на страната BC пресича правата AC в точка D и $DH = HA + AB$. Намерете възможните стойности на $\sphericalangle BAC$.

Решение. *Случай 1.* Ако D лежи на отсечката AC, то $\triangle ABC$ е остроъгълен и H лежи на отсечката AC. От условието следва, че H е между A и D. Да построим точка E на отсечката DH, за която $AH = HE$ (и значи $BA = DE$). Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, така че $BE = BA = DE$. От симетралата имаме $BD = CD$; нека $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DBC = x$. Тогава $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BDE = 2x$ като външен за $\triangle BCD$ и $\sphericalangle BAH = \sphericalangle BEH = 4x$ като външен за $\triangle BDE$. За сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме $4x + 4x + x = 180°$, $x = 20°$, $\sphericalangle BAC = 4x = 80°$.



Случай 2. Ако D лежи на лъча $CA^{\rightarrow}$ след A, то $\triangle ABC$ е остроъгълен и H лежи на отсечката AC. От условието следва, че $AD = AB$; нека $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD = x$. Тогава $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 2x$ като външен за $\triangle ABD$ и $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DBC = 3x$. За сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме $2x+2x+3x = 180°$, $x = (180/7)°$, $\sphericalangle BAC = 2x = (360/7)°$.





Случай 3. Ако D лежи на лъча $\overrightarrow{AC}$ след C, то $\triangle ABC$ е тъпоъгълен и H лежи на същия лъч. От условието следва, че H е между A и D. Да построим точка E на отсечката DH, за която $AH = HE$ (и значи $BA = DE$). Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, така че $BE = BA = DE$; нека $\sphericalangle BDE = \sphericalangle DBE = x$. Тогава $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BEA = 2x$ като външен за $\triangle BDE$ и $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BCD = 4x$ като външен за $\triangle ABC$ (имаме $BD = CD$ от симетралата). За сбора на ъглите в $\triangle BCD$ получаваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, $x = 20^\circ$, $\sphericalangle BAC = 2x = 40^\circ$.

Оценяване. (6 точки) по 2 точки за всеки един от трите случая.

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа n, такива че

$$11^n + 2^n + 1 \text{ е делител на } 11^{n+1} + 2^{n+1} + 1.$$

Решение. Нека n е от желания вид. Числото $a = 11^n + 2^n + 1$ е делител на числото $11a - (11^{n+1} + 2^{n+1} + 1) = 9.2^n + 10$. При $n = 1$ получаваме $a = 14$, което е делител на $11^2 + 2^2 + 1 = 126$. Ще покажем, че при $n > 1$ е в сила неравенството $9.2^n + 10 < 11^n + 2^n + 1$. Последното е еквивалентно на $8.2^n + 9 < 11^n$. Имаме

$$11^n = (8+3)11^{n-1} = 8.11^{n-1} + 3.11^{n-1} > 8.8^{n-1} + 3.11 > 8.2^n + 9.$$

Следователно единствената стойност на n е $n = 1$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за намиране на решението $n = 1$; 2 т. за $11^n + 2^n + 1 / 9.2^n + 10$; 4 т. за $9.2^n + 10 < 11^n + 2^n + 1$ при $n > 1$.

Задача 8.4. В редица са записани числата от 1 до 9, така че сборът на всяко число на нечетна позиция със съседите (съседа) му е S. Определете всички възможни стойности на S.

Решение. Ако числата са записани в реда $a, b, c, \dots, h, i$, то $5S = 45 + b + d + f + h$. Понеже $10 \leq b + d + f + h \leq 30$, получаваме, че S е сред числата 11, 12, 13, 14, 15. От друга страна, $3S = a + b + d + e + f + h + i = 45 - (c + g)$, което изключва $S = 15$.

$S = 11$ е възможно при наредбата 925461738.

$S = 13$ е възможно при наредбата 941832567.

$S = 14$ е възможно при наредбата 592347168.

Ако допуснем, че $S = 12$, то $c + g = 9$. Тъй като редицата от числа $a, b, c, \dots, h, i$ записана в обратен ред също притежава свойството от условието, то без ограничение на общността $c < g$.

- Ако $c = 1$, $g = 8$, то $f + h = 4$: абсурд.
- Ако $c = 2$, $g = 7$, то $f + h = 5$, т.е. $\{f; h\} = \{1; 4\}$. Ако $h = 1$, то $i = 11$: абсурд. Ако $f = 1$, $h = 4$, то $i = 8$, $b + d = 10$: абсурд, понеже вече са използвани числа от всички подходящи двойки.
- Ако $c = 3$, $g = 6$, то $f + h = 6$, т.е. $\{f; h\} = \{1; 5\}$ или $\{2; 4\}$. Ако $h \leq 2$, то $i \geq 10$: абсурд. Ако $f = 1$, $h = 5$, то $i = 7$, $b + d = 9$: абсурд, понеже вече са използвани числа от всички подходящи двойки. Ако $f = 2$, $h = 4$, то $i = 8$, $b + d = 9$: абсурд, понеже вече са използвани числа от всички подходящи двойки.
- Ако $c = 4$, $g = 5$, то $f + h = 7$, т.е. $\{f; h\} = \{1; 6\}$. Ако $h = 1$, то $i = 11$: абсурд. Ако $h = 6$, то $i = 6$: абсурд.

Окончателно $S = 11$, $S = 13$ или $S = 14$.

Забележки.

1. $S = 15$ би било възможно само ако $\{b, d, f, h\} = \{6, 7, 8, 9\}$, но тогава сборът на 9 с най-близкото от другите три числа и числото между тях ще е по-голям от 15: противоречие.
2. $S = 12$ би било възможно само ако $b + d + f + h = 15$. Да допуснем, че това е така. Сред числата b, d, f, h не може да присъства 9, понеже съседите му трябва да са сред 1, 2 и 3, така че $b + d + f + h > 15$. Сред числата b, d, f, h не може да присъства 8, понеже съседите му трябва да са сред 1, 3 и 4, така че $b + d + f + h > 15$. Ако $\{b, d, f, h\} = \{1, 2, 5, 7\}$, то $b \neq 7; 5$ (иначе $a = 5; 7$) и $h \neq 7; 5$ (иначе $i = 5; 7$). Но тогава $d + f = 5 + 7$, така че $e = 0$: абсурд. Ако $\{b, d, f, h\} = \{1, 3, 4, 7\}$, то $b; h \neq 1$ (иначе $a; i = 11$). Както по горе, без ограничение на общността можем да предположим, че $d = 1$. Тогава $b; f \neq 7$ (понеже $c; e \neq 4$) и $b; f \neq 4$ (понеже $c; e \neq 7$): абсурд. Ако $\{b, d, f, h\} = \{1, 3, 5, 6\}$, то $b; h \neq 1$ (иначе $a; i = 11$) и $b; h \neq 6$ (иначе $a; i = 6$). Но тогава $d + f = 1 + 6$, така че $e = 5$: абсурд. Ако

$\{b,d,f,h\}=\{2,3,4,6\}$, то $b;h\neq 2$ (иначе $a;i=10$) и $b;h\neq 6$ (иначе $a;i=6$). Но тогава $d+f=2+6$, така че $e=4$: абсурд.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $S\in\{11,12,13,14,15\}$; 1 т. за $S\neq 15$; по 1 т. за $S=11$, $S=13$ и $S=14$; 2 т. за $S\neq 12$.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравненията $x^2+ax-1=0$ и $y^2+(a+1)y-1=0$ имат съответно корени x_1,x_2 и y_1,y_2, за които е изпълнено равенството

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1+y_2}.$$

Решение. Лесно се вижда, че корените на двете уравнения са реални. С помощта на формулите на Виет получаваме, че

$$\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{y_1+y_2} \iff \frac{a^2+2}{a}=\frac{(a+1)^2+2}{a+1}.$$

От последното равенство следва, че $a^2+a-2=0$, откъдето $a_1=1$ и $a_2=-2$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за получаване на уравнение за a; 4 т. за правилното му решаване.

Задача 9.2. Да се намери най-малкото естествено число k, за което съществува естествено число $n\geq 100$, такова, че числото $n(n+k)$ е точен квадрат.

Решение. (**Първи начин**) От $100(100+21)=110^2$ следва, че $k\leq 21$. Да допуснем, че $k\leq 20$ и да положим $d=(n,k)$, $n=n_1d$, $k=k_1d$, където $(n_1,k_1)=1$. Да отбележим, че $n_1(n_1+k_1)d^2=n(n+k)$, което означава, че $n_1(n_1+k_1)$ е точен квадрат. Тъй като $(n_1,n_1+k_1)=1$, заключаваме, че числата n_1 и n_1+k_1 са точни квадрати.

От $k\leq 20$ следва, че $d\leq 20$ и оттук $n_1=\frac{n}{d}\geq\frac{100}{20}=5$. Тъй като n_1 е точен квадрат, имаме всъщност $n_1\geq 9$. Тъй като k_1 е разликата от n_1 поне до следващия точен квадрат, имаме $k_1\geq 7$. Сега от $k=k_1d\leq 20$ следва, че $d\leq 2$ и по същия начин, както по-горе, последователно получаваме $n_1\geq 50$, т.е. $n_1\geq 64$, откъдето $k_1\geq 17$, $d=1$, $n_1\geq 100$ и накрая $k_1\geq 21$, което е противоречие, защото $k_1\leq k\leq 20$.

(**Втори начин**) От $100(100+21)=110^2$ следва, че $k\leq 21$. Ако допуснем, че $k\leq 20$, $n\geq 100$ и $n(n+k)=t^2$, то от квадратното уравнение $n^2+kn-t^2=0$ следва, че неговата дискриминанта k^2+4t^2 е точен квадрат. Но от друга страна, $k^2\leq 400\leq 4n<4t$ и следователно $(2t)^2<k^2+4t^2<(2t+1)^2$, което е противоречие.

Оценяване. (6 точки) (**Първи начин**) 1 т. за пример с $k=21$; 1 т. за преминаване към взаимнопрости променливи; 1 т. за $n_1\geq 9$; 1 т. за $d\leq 2$; 2 т. за довършване на решението. (**Втори начин**) 1 т. за пример с $k = 21$; 2 т. за разглеждане на $n(n+k) = t^2$ като квадратно уравнение относно n и достигане до извода, че k^2+4t^2 е точен квадрат; 3 т. за ограничаването на $k^2 + 4t^2$ между два последователни точни квадрата при $k \leq 20$.

Задача 9.3. Петър покрил една шахматна дъска с размери 600×600 с правоъгълници с размери 2×3 по такъв начин, че всяко квадратче от дъската да бъде покрито от точно един правоъгълник. След това, той разрязал всеки от тези правоъгълници на три по-малки правоъгълника с размери 1×1, 1×2 и 1×3 по произволен начин и показал полученото покритие на Николай. Винаги ли ще може Николай по показаното му покритие с по-малки правоъгълници да определи еднозначно какво е било първоначалното покритие с правоъгълници 2×3?

Решение. Да, винаги! Да допуснем, че съществуват две покрития A и B с правоъгълници 2×3, които водят (при подходящи разрязвания) до едно и също покритие с по-малки правоъгълници. Тогава непременно има правоъгълник P_1 с размери 1×3, такъв, че правоъгълникът Q_1 с размери 2×3, от който P_1 е част в A, е разположен по различен начин от правоъгълника R_1 с размери 2×3, от който P_1 е част в B. Без загуба на общност, нека P_1 се съдържа в i-тия ред на дъската, Q_1 се съдържа в i-тия и $i-1$-вия, и R_1 се съдържа в i-тия и $i+1$-вия ред.

Нека P_2 бъде правоъгълниат 1×2, получен от R_1 в B, и нека Q_2 бъде правоъгълникът 2×3, от който P_2 е част в A. Тогава P_2 се съдържа в $i+1$-вия ред на дъската и Q_2 се съдържа в $i+1$-вия и $i+2$-рия ред.

Аналогично, нека P_3 бъде правоъгълникът 1×3, получен от Q_2 в A, и нека R_2 бъде правоъгълникът 2×3, от който P_3 е част в A. Тогава P_3 се съдържа в $i+2$-вия ред на дъската и Q_2 се съдържа в $i+2$-рия и $i+3$-тия ред.

Продължавайки по същия начин и по-нататък, в крайна сметка ще достигнем до правоъгълник P_n, който ще трябва да лежи извън дъската – противоречие.

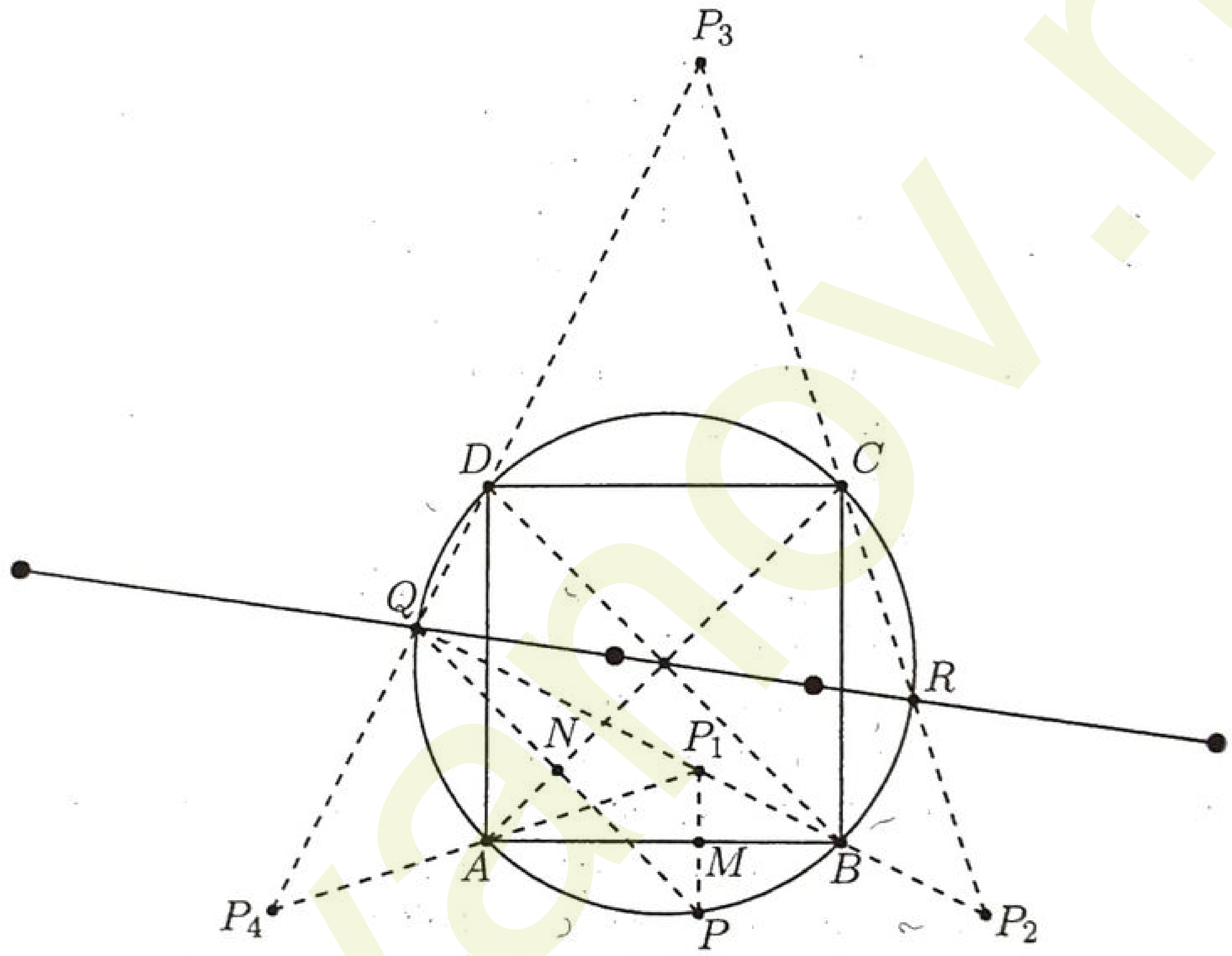
И така, измежду всички покрития с правоъгълници 2×3 има само едно – първоначалното – от което с разрязване може да се получи покритието с по-малки правоъгълници, наблюдавано от Николай. На него му остава само да провери всички възможни покрития и всички възможни разрязвания на всяко от тях едно по едно, докато намери исканото.

Забележка. Твърдението остава вярно, ако първоначалното покритие е на произволна дъска с правоъгълници $1 \times n$ (за някое фиксирано n) и Петър разрязва всеки от тях на две части по произволен начин.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за ясно формулирано изявление, че ще се доказва еднозначност на възстановяването;1 т. за допускане на противното; 1 т. за разглеждане на правоъгълник 1×2 или 1×3, който е част от различни правоъгълници 2×3 в двете оригинални покрития; 3 т. за достигане до противоречие; 1 т. за описание на алгоритъма, използван от Николай.

Задача 9.4. Точката P лежи върху описаната около квадрата $ABCD$ окръжност. Нека P_1, P_2, P_3 и P_4 са симетричните точки на P относно правите AB, BC, CD и DA съответно. Да се докаже, че симетричните точки на P относно правите P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1 лежат на една права, която минава през центъра на $ABCD$.

Решение. Нека, без загуба на общност, P лежи върху дъгата $\widehat{AB}$. Нека Q и R са симетричните точки на P относно правите AC и BD, и нека M и N са проекциите на P върху правите AB и AC, съответно.



Имаме $\sphericalangle P_1QP = \sphericalangle MNP$ (понеже M и N са среди на PP_1 и PQ) $= \sphericalangle MAP$ (понеже четириъгълникът $PMNA$ е вписан в окръжност с диаметър PA) $= \sphericalangle BAP = \frac{1}{2}\,\widehat{PB}$.

Аналогично се установява и $\sphericalangle P_2QP = \frac{1}{2}\,\widehat{PB}$, откъдето следва, че точките P_1, P_2 и Q лежат на една права. На тази права лежи и точката B, понеже P_1 и P_2 са симетрични относно B.

От $\sphericalangle RQP = 2\sphericalangle BQP = 2\sphericalangle P_1QP$ следва, че точката, симетрична на P относно правата P_1P_2, лежи на QR. Аналогично, на QR лежат и точките, симетрични на P

относно P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1. Понеже QR е диаметър в описаната окръжност на $ABCD$ и съдържа неговия център, то с това задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за построяване на точките Q и R; 1 т. за $\sphericalangle P_1QP = \sphericalangle P_2QP$ (или еквивалентно); 1 т. за доказване, че точките P_1, P_2, B и Q лежат на една права (или еквивалентно); 2 т. за доказване, че някоя от четирите интересуващи ни точки лежи на правата QR; 1 т. за довършване на решението.

Задача 10.1. Да се реши уравнението

$$x^2 + 3\sqrt{x+3} = 7.$$

Решение. Даденото уравнение записваме във вида

$$3\sqrt{x+3} = 7 - x^2, \text{ където } x \in [-3, +\infty).$$

След повдигане на квадрат достигаме до еквивалентното уравнение

$$x^4 - 14x^2 - 9x + 22 = 0, \text{ където } x \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}].$$

Лесно се проверява, че последното уравнение има само два цели корена $x = 1$ и $x = -2$ и по схемата на Хорнер то добива вида:

$$(x-1)(x+2)(x^2 - x - 11) = 0.$$

Но $x \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ и следователно $x^2 - x - 11 \leq 7 + \sqrt{7} - 11 = \sqrt{7} - 4 < 0$, което показва, че $x = 1$ и $x = -2$ са единствените решения на задачата.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за свеждане до еквивалентно уравнение без радикали; 1 т. за намиране на корените $x = 1$ и $x = -2$; 2 т. за разлагане по схемата на Хорнер; 2 т. за отхвърляне на други решения.

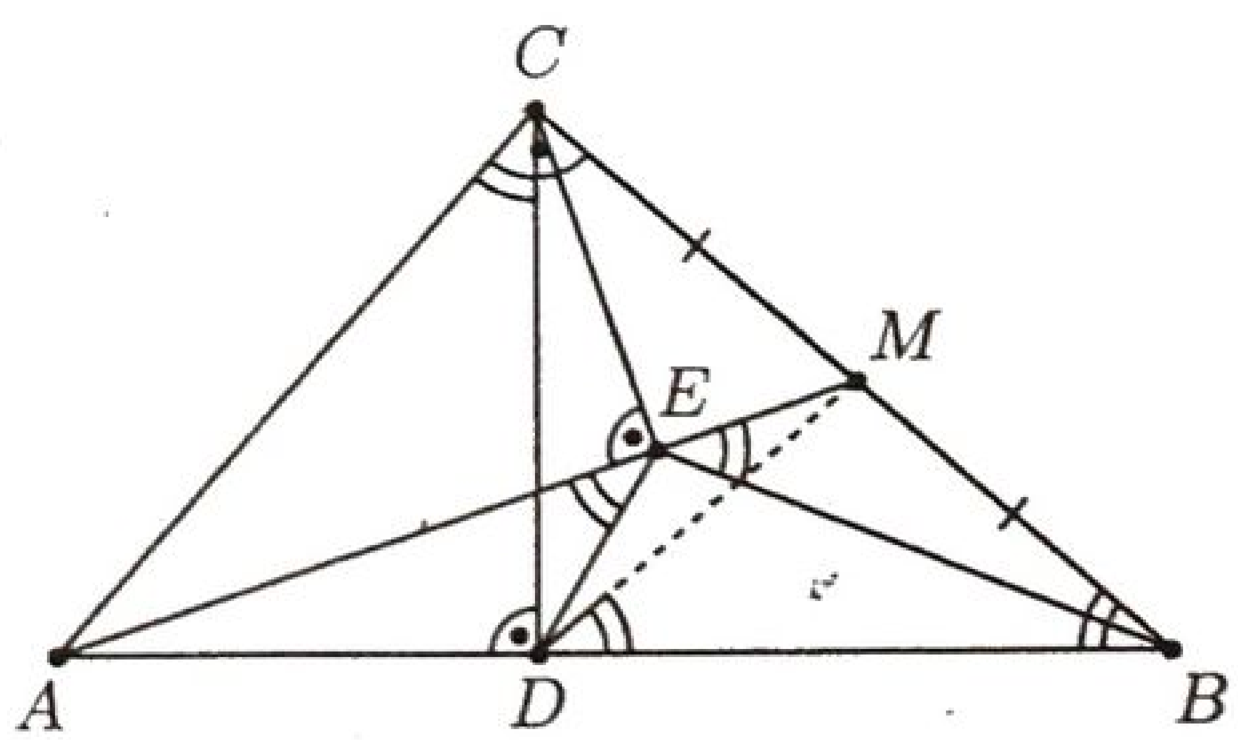
Задача 10.2. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха C. Нека M е средата на BC, а D и E са петите на перпендикулярите от върха C към AB и AM съответно. Ако $BE = 2DE$, то да се намери $\sphericalangle ABC$.

Решение. Нека $\sphericalangle ABC = \beta$. Тъй като точките A, D, E и C лежат на окръжност с диаметър AC, то

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC = \beta$$

и следователно четириъгълникът $DBME$ е вписан в окръжност. Освен това, DM е медиана в правоъгълния $\triangle BDC$ и следователно

$$\sphericalangle BEM = \sphericalangle BDM = \sphericalangle DBM = \beta.$$



Така получаваме, че $\sphericalangle DEC = \sphericalangle CEB = 90^\circ + \beta$. От друга страна, $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CAE = \sphericalangle BCE$ и следователно $\triangle CDE \sim \triangle BCE$. Тогава

$$2 = \frac{BE}{DE} = \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CE}{DE} = \left(\frac{BC}{CD}\right)^2,$$

т.е. $BC = \sqrt{2}CD$ и $\beta = 45^\circ$.

Оценяване. (6 точки) а) 1 т. за $DBME$ – вписан; 3 т. за $\triangle CDE \sim \triangle BCE$; 2 т. за $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които

$$\varphi(\varphi(n)) + \varphi(n) = n,$$

където $\varphi(n)$ е броя на естествените числа, ненадминаващи n и взаимно прости с n.

Решение. Известно е, че функцията $\varphi(n)$ има следния явен вид:

$$\varphi(1) = 1 \text{ и } \varphi(n) = p_1^{s_1-1} p_2^{s_2-1} \cdots p_k^{s_k-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1) \text{ за } n > 1,$$

където $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ е каноничното разлагане на n на прости множители. В частност, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ и $\varphi(n)$ е четно число при $n > 2$. Освен това,

$$\varphi(2n) = \begin{cases} 2\varphi(n), & \text{ако } n \text{ е четно;} \\ \varphi(n), & \text{ако } n \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Нека естественото число n изпълнява условието

$$\varphi(\varphi(n)) + \varphi(n) = n \quad (*)$$

Ще разгледаме два случая:

Случай 1. Ако n е нечетно число. Тогава $\varphi(n) = 1$ или $\varphi(n) = 2$ и след заместване в (*) достигаме до единствено решение $n = 3$.

Случай 2. Ако n е четно число. Тогава $n = 2^s m$, където $s, m \in \mathbb{N}$ и m е нечетно число. След заместване в (*) получаваме

$$\varphi(\varphi(2^s m)) + \varphi(2^s m) = 2^s m \Leftrightarrow \varphi(2^{s-1}\varphi(m)) + 2^{s-1}\varphi(m) = 2^s m.$$

Ако $m = 1$, то последното равенство добива вида $\varphi(2^{s-1}) = 2^{s-1}$ и единствената възможност е $s = 1$, която ни води до второто решението $n = 2$. Ако $m > 1$, то $\varphi(m)$ е четно число и достигаме до равенството

$$2^{s-1}\varphi(\varphi(m)) + 2^{s-1}\varphi(m) = 2^s m \Leftrightarrow \varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) = 2m.$$

Но $\varphi(n) < n$ за всяко $n > 1$, т.е. $\varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) < 2m$, което е противоречие.

Окончателно, $n = 2$ и $n = 3$ са единствените решения на задачата.

Забележка. В случай 2 може да се използва неравенството $\varphi(n) \leqq \frac{n}{2}$ за всяко четно n, което лесно се извежда от посочените свойства на функцията $\varphi(n)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за представяне на $\varphi(n)$ в явен вид; 2 т. за случай 1; 4 т. за случай 2. (1 т. за посочване на двете решения без да се докаже тяхната единственост)

Задача 10.4. Всеки от участващите ученици в едно математическо състезание има не повече от $d \geq 1$ познати. Нека d_1 и d_2 са неотрицателни цели числа, за които $d - 1 = d_1 + d_2$. Да се докаже, че учениците могат да бъдат разделени в две стаи по такъв начин, че всеки ученик в първата стая има не повече от d_1 познати в неговата стая и всеки ученик във втората стая има не повече от d_2 познати в неговата стая.

Решение. Разбиваме учениците на две групи V_1 и V_2 и означаваме с e_i броя на двойките познати във V_i, $i = 1, 2$. Измежду всички възможни разбивания на учениците по стаи, които са краен брой, да разгледаме такова разбиване (то може и да не е единствено) при което числото $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$ е минимално.

Ще докажем, че това разбиване изпълнява условието на задачата. Да допуснем противното и нека в поне една от групите, да речем V_1, има ученик x, който има $d'_x \geqq d_1 + 1$ познати в групата. Означаваме с d''_x броя на познатите на x във V_2. При преместването на x във V_2 броят на познанствата във V_1 и V_2 става съответно $e'_1 = e_1 - d'_x \leqq e_1 - d_1 - 1$ и $e'_2 = e_2 + d''_x \leqq e_2 + d - d'_x \leqq e_2 + (d_1 + d_2 + 1) - (d_1 + 1) = e_2 + d_2$. Оттук

$$e'_1(d_2 + 1) + e'_2(d_1 + 1) - e_1(d_2 + 1) - e_2(d_1 + 1) = -d_1 - 1 < 0,$$

което е противоречие с минималността на $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$. С това и доказателството е завършено.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за избора на стратегия по преместването на учениците между групите; 3 т. за посочване на полуинвариант, следващ посочената стратегия; 2 т. за доказателство, че този полуинвариант води до крайност на процеса.

Задача 11.1. Да се намерят всички естествени числа d, за които съществува безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots$ от естествени числа с разлика d със следното свойство: съществува естествено число k, за което за всяко n числата

$$a_{S_{n+1}}, (n + k)a_k, -a_{S_n}$$

образуват (в този ред) аритметична прогресия. (S_n е сборът от първите n члена на прогресията, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.)

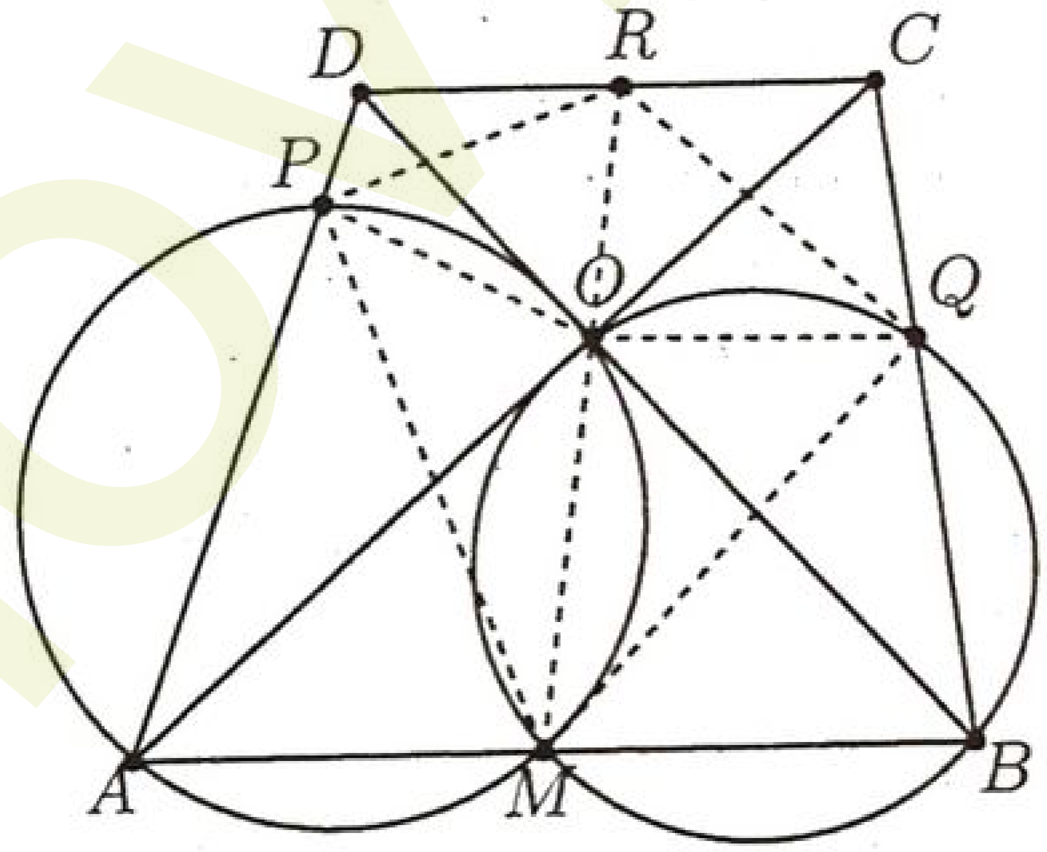
Решение. От $a_{S_{n+1}} - a_{S_n} = 2(n+k)a_k$ получаваме $a_{n+1}d = (n+k)a_k$ или

$$(a_1 + nd)d = (n+k)a_k.$$

Понеже това равенство е изпълнено за всяко n, намираме $d^2 = a_k$ и $a_1 d = ka_k$. Следователно $a_1 d = ka_k = kd^2$, т.е. $a_1 = kd$. Сега от $a_k = a_1 + (k-1)d = d^2$ получаваме $d^2 = kd + (k-1)d$ или $d = 2k-1$. Търсените числа са всички нечетни естествени числа.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за получаване на първото равенство; 2 т. за намиране на $d^2 = a_k$ и $a_1 d = ka_k$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 11.2. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с перпендикулярни диагонали и пресечна точка на диагоналите точка O. Върху основата AB е избрана точка M. Описаните окръжности около $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ пресичат отсечките AD и BC съответно в точки P и Q. Да се докаже, че центърът на описаната окръжност около $\triangle MPQ$ лежи на средната отсечка на трапеца.



Решение. Нека правата MO пресича отсечката CD в точка R. От вписаните четириъгълници $AMOP$ и $MBQO$ имаме $\sphericalangle BMO = \sphericalangle APO$ и $\sphericalangle BMO = \sphericalangle CQO$. От $AB \parallel CD$ намираме $\sphericalangle BMO = \sphericalangle DRO$, откъдето получаваме

$$\sphericalangle BMO = \sphericalangle CQO = \sphericalangle APO = \sphericalangle DRO.$$

Следователно четириъгълниците $PORD$ и $OQCR$ са вписани. Имаме

$$\sphericalangle MQR = \sphericalangle MQO + \sphericalangle OQR = \sphericalangle MBO + \sphericalangle OCR = \sphericalangle MBO + \sphericalangle OAM = 90^\circ$$

и аналогично $\sphericalangle MPR = 90^\circ$. Това означава, че четириъгълникът $MQRP$ е вписан и центърът на описаната окръжност е средата на отсечката MR. Оттук следва и твърдението на задачата.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за въвеждане на точката Q; по 1 т. за всеки от вписаните четириъгълници $PORD$ и $OQCR$; по 1 т. за всеки от двата ъгъла от по 90^circ; 1 т. за заключението, че средата на MR лежи на средната отсечка.

Задача 11.3. Да се докаже, че за всяко съставно естествено число $n \geq 6$ съществува множество A от n различни естествени числа, притежаващо следното свойство:

За всеки делител d на n, елементите на A могат да се разделят по два различни начина на $\frac{n}{d}$ непресичащи се подмножества всяко с по d елемента така, че сборът на елементите на кое да е множество от едното разделяне да е равен на сбора на елементите на някое множество от другото разделяне.

Решение. Елементите на множеството $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ могат да се разделят по два начина (понеже $1+5=2+4$, $3+4=1+6$ и $6+2=3+5$) така че да е изпълнено свойството от условието. Следователно при $d = 2$ за получаване на множеството A към елементите на B прибавяме произволни $n-6$ различни естествени числа, по-големи от 6. В двете разделяния тези $n-6$ елемента групираме по един и същи начин на двуелементни подмножества.

Ще покажем, че ако в A имаме четири елемента a, b, c, d, за които $a+b=c+d$, то при всяко $d \geq 3$ търсените разделяния съществуват. Наистина нека първите две множества от първото разделяне да съдържат съответно $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ и още по $d-2$ произволни елемента. Останалите елементи групираме по произволен начин в останалите множества. При второто разделяне сменяме местата на $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ в първите две множества, а останалите запазваме. Лесно се вижда, че условието е изпълнено.

Следователно е достатъчно да изберем множество A от различни естествени числа, което съдържа $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за случая $d = 2$; 2 т. за нечетно d; 1 т. за общия случай.

Задача 11.4. Да се намерят всички естествени числа n, за които съществуват полиноми с цели коефициенти $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), g(x)$ (не непременно различни) такива, че $x^{2013}+n$ дели $g(x)$ и

$$\prod_{i=1}^{n}(f_i(x)^2-1) = g(x)^2-1.$$

Решение. Отговор: всички нечетни естествени числа. Понеже $x^{2013} \equiv x \pmod 3$, то съществува x_0 за което $3|x_0^{2013}+n$. Полагайки $x = x_0$ в даденото равенство, получаваме че по модул 3 то е възможно само при $3|f_i(x_0)$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогава $(-1)^n \equiv -1 \pmod 3$, което означава, че n е нечетно число.

Да разгледаме редицата $g_1(x), g_2(x), \ldots$, дефинирана като $g_1(x) = x^{2013}+n$ и $g_{i+1}(x) = 4g_i(x)^3 - 3g_i(x)$ при $i \geq 1$. Ясно е, че $x^{2013}+n$ дели всеки от полиномите в дадената редица, като освен това

$$g_{i+1}(x)^2 - 1 = (4g_i(x)^2-1)^2(g_i(x)^2-1).$$

Следователно

$$g_t(x)^2 - 1 = (4g_{t-1}(x)^2-1)^2 \ldots (4g_1(x)^2-1)^2(g_1(x)^2-1) = \prod_{i=1}^{2t-1}(f_i(x)^2-1),$$

където $f_1(x) = g_1(x)^2 - 1$ и $f_{2i}(x) = f_{2i+1}(x) = 4g_i(x)^2 - 1$ за $i = 1, 2, \dots, t-1$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказателство, че n е нечетно число; 5 т. за пример на функции, изпълняващи условието.

Задача 12.1. Нека $a_1, a_2, \dots$ е редица от положителни числа, за които $a_2 = 3a_1 - 1$, $a_3 = 2a_2 - 1, a_4 = 3a_3 - 1, a_5 = 2a_4 - 1$ и т.н. Да се намери най-малката възможна стойност на a_1.

Решение. Ако $b_n = a_{2n-1}$ и $c_n = a_{2n}$, то $b_{n+1} = 6b_n - 3$ и $c_{n+1} = 6c_n - 4$. Следователно $b_{n+1} - 3/5 = 6(b_n - 3/5)$ и $c_{n+1} - 4/5 = 6(c_n - 4/5)$, откъдето $b_{n+1} = 3/5 + 6^n(a_1 - 3/5)$ и $c_{n+1} = 4/5 + 6^n(c_1 - 4/5) = 4/5 + 6^n 3(a_1 - 3/5)$. Значи $a_n > 0$ за всяко n точно когато $a_1 \geq 3/5$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за $b_{n+1} = 6b_n - 3$ и $c_{n+1} = 6c_n - 4$.; по 2 т. за намиране на b_n и c_n в явен вид; 1 т. за $a_1 \geq 3/5$.

Задача 12.2. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функция, за която

$$|f(x)| - |f(x) + x - 1| = |x + 1| - 2|x|$$

за всяко $x \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че множеството

$$A = \{(x, y) : 0 < y < f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

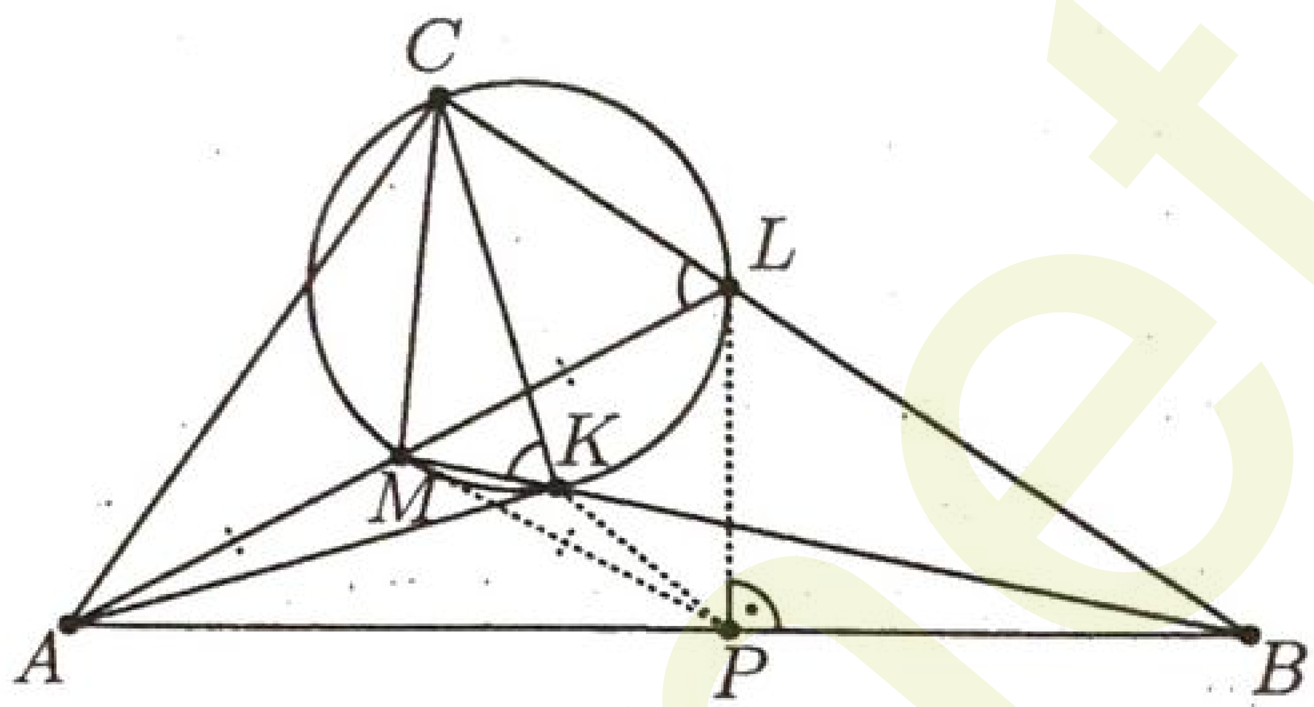
съдържа вътрешността на триъгълник с лице 1.

Решение. Нека $x \leq -1$ и $f(x) > 0$. Ако $f(x) + x - 1 \geq 0$, то от даденото равенство следва, че $x = 1$, противоречие. Ако $f(x) + x - 1 < 0$, то от даденото равенство следва, че $f(x) = 0$, което също е противоречие. Следователно $f(x) \leq 0$. Обратно, ако $x \leq -1$ и $f(x) \leq 0$ даденото равенство е изпълнено. Аналогично се проверява, че при $-1 < x < 0$ даденото равенство е изпълнено само ако $f(x) > 0$ и $f(x)+x-1 \leq 0$. В този случай намираме, че $f(x) = x + 1$. Същите разсъждения показват,че при $0 \leq x < 1$ даденото равенство е еквивалентно на $f(x) \geq 1 - x$, а при $x \geq 1$ то е еквивалентно на $f(x) \geq 0$. Следователно множеството A съдържа вътрешността на триъгълника с върхове $(-1, 0), (1, 0)$ $(0, 1)$, който има лице 1.

Оценяване. (6 точки) По една точка за аналитично описание на функцията в четирите интервала; 2 т. за намиране на търсения триъгълник

Задача 12.3. Нека M е средата на ъглополовящата AL в $\triangle ABC$ ($L \in BC$). Описаната окръжност около $\triangle CLM$ пресича отсечката BM в точка K. Да се докаже, че ако $\sphericalangle ACB = 180° - \sphericalangle AKC$, то $\sphericalangle ACB = 90°$.

Решение. (**Първи начин**) Нека $\sphericalangle BAC = \alpha$. От условието следва, че



$$\sphericalangle AKM = \sphericalangle AKC - \sphericalangle CKM =$$

$$(180^\circ - \sphericalangle ACB) - \sphericalangle CLM = \sphericalangle CAL = \frac{\alpha}{2}.$$

Следователно $\triangle AKM \sim \triangle BAM$. Тогава $MA^2 = MK.MB$. От друга страна, $BL.BC = BK.BM$ и след като съберем тези равенства получаваме

$$MA^2 + BL.BC = BM^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BL^2 - AL^2) \Leftrightarrow AL^2 - CL^2 = AB^2 - CB^2.$$

Последното означава, че B и L имат една и съща проекция върху правата AC, т.е. $AC \perp BL$.

(**Втори начин**) (Стоян Боев) Нека P е петата на перпендикуляра от L към AB. Тогава PM се явява медиана в правоъгълен триъгълник и получаваме

$$\sphericalangle APM = \sphericalangle PAM = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle AKM.$$

Следователно $APKM$ е вписан четириъгълник от където

$$BP.BA = BK.BM = BL.BC,$$

т.е. $APLC$ също е вписан четириъгълник и $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle APL = 90^\circ$.

Забележка. Може да се докаже по аналогичен начин, че

$$\sphericalangle ACB = 90^\circ \iff \sphericalangle AKC = 90^\circ.$$

Оценяване. (7 точки) (**Първи начин**) 1 т. за $\sphericalangle AKM = \frac{\alpha}{2}$; 1 т. за $\triangle AKM \sim \triangle BAM$.; 3 т. за достигане до проста метрична връзка между елементи в $\triangle ABC$; 2 т. за довършване на решението. (**Втори начин**) 1 т. за $\sphericalangle AKM = \frac{\alpha}{2}$; 1 т. за построяване на точката P; 2 т. за $APKM$ вписан четириъгълник; 2 т. за $APLC$ вписан четириъгълник; 1 т. за $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Задача 12.4. Дадени са взаимно прости естествени числа $a < b$. Да се намери броят на начините по които можем да оцветим числата $1, 2, 3, \ldots, 2013ab$ в два цвята така, че за всяко $t = 1, 2, \ldots, 2013a$ числата t и bt са разноцветни и числата at и bt също са разноцветни.

Решение. Да разгледаме граф с върхове $1, 2, \dots 2013ab$ и за всяко $t = 1, 2, \dots, 2013a$ да свържем с ребро върховете t и bt и върховете at и bt. Ще докажем, че всички цикли в този граф са с четна дължина. Да разгледаме произволен цикъл и нека $a^m b^n t$ е най-малкият елемент в него. Тогава най-големият елемент ще има вида $a^p b^q t$. Всеки път между $a^m b^n t$ и $a^p b^q t$ ще се състои от няколко ребра съответстващи на умножение с b и на няколко ребра съответстващи на умножение с $\frac{b}{a}$. Това означава, че степента на b за всяко ново число се увеличава с 1 и следователно дължината на всеки път между $a^m b^n t$ и $a^p b^q t$ е $q - n$. Оттук следва, че всеки цикъл е с дължина $2(q - n)$, т.е. е четно число.

Тъй като всеки граф, в който всички цикли са с четна дължина е двуделен, то върховете му могат да се оцветят в два цвята така, че свързани с ребро върхове да са разноцветни. Следователно, ако броят на свързаните компоненти в разглеждания граф е A, то различните оцветявания са 2^A. Ще намерим A като разгледаме най-малкият елемент n на всяка компонента. Ако b дели n, то $\frac{n}{b}$ е в същата компонента и тогава n не е най-малкият елемент. Ако a дели n и $\frac{n}{a}.b \le 2013ab$, то $\frac{n}{a}$ ще бъде елемент на същата компонента и отново n не е най-малкия елемент. Накрая, ако a дели n и $\frac{n}{a}.b > 2013ab \iff n > 2013a^2$, то n е най-малкият елемент в съответната компонента. Броят на тези n е $2013(b - a)$. Освен това, ако n не се дели нито на a, нито на b, то n е най-малък елемент в своята компонента. Броят на тези n е $2013ab - 2013a - 2013b + 2013$. Окончателно $A = 2013(ab - 2a + 1)$ и отговорът е $2^{2013(ab-2a+1)}$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за дефинирането на граф; 2 т. за доказателството, че всеки цикъл е с четна дължина; 3 т. за преброяването на броя на свързаните компоненти; 1 т. за получаване на отговора.

Задачите са предложени от:

Иван Тонов – 8.1, 8.3;

Ивайло Кортезов – 8.2, 8.4;

Петър Бойваленков – 9.1, 9.2;

Николай Белухов – 9.3, 9.4;

Стоян Боев – 10.1, 10.2;

Иван Ланджев – 10.3, 10.4;

Емил Колев – 11.1, 11.3;

Александър Иванов – 11.2, 11.4, 12.4;

Николай Николов – 12.1, 12.3;

Олег Мушкаров – 12.2.