Първо контролно за МБОМ 2016 14 май

Задача 1. Четириъгълник $ABCD$, за който $\sphericalangle BAC < \sphericalangle DCB$ е вписан в окръжност с център O. Ако $\sphericalangle BOD = \sphericalangle ADC = \alpha$, намерете за кои стойности на α е изпълнено неравенството $AB < AD + CD$.

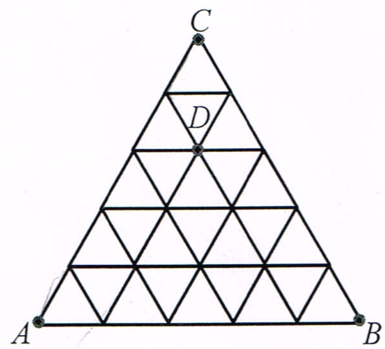
Задача 2. За числата $a > 0, b > 0, c > 0$ е изпълнeнео равенството $a + b + c = k$. Намерете най-малката стойност на израза $M = \dfrac{b^2}{\sqrt{ka+bc}} + \dfrac{a^2}{\sqrt{kc+ab}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{kb+ca}}$.

Задача 3. Даден е многочлена $M(x, y) = x^2 + xy - 2y$, където x, y са естествени числа.

а) решете уравнението $x^2 + xy - 2y = 64$;

б) ако $M(x, y)$ е точен квадрат, докажете, че числото $x + y + 2$ е съставно. $x>2$

Задача 4. Равностранен триъгълник ABC със страна n $(n \geq 3)$ е разделен на n^2 равностранни триъгълника със страна 1 с помощта на прави, които са успоредни на страните на ΔABC. Във върховете на единичните триъгълници са поставени числа. За един ход се увеличават или намаляват с единица числата във върховете на ромб, образуван от два единични триъгълника с обща страна. Първоначално във върховете A, B, C и D са поставени единици, а във всички останали върхове – съответно нули. Възможно ли е с повтаряне на ходове числата във всички върхове на единичните триъгълници да станат нули?



Второ контролно за МБОМ 2016 15 май

Задача 1. За реалните числа a, b, c, d, e, f е изпълнено

$$a + b + c + d + e + f = 20,$$

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 + (d-2)^2 + (e-2)^2 + (f-2)^2 = 24$$

Намерете най-голямата стойност, която приема числото d.

Задача 2. Върховете на петоъгълник $ABCDE$ лежат на окръжност, а точките H_1, H_2, H_3, H_4 са съответно ортоцентровете на $\triangle ABC, \triangle ABE, \triangle ACD, \triangle ADE$. Докажете, че четириъгълника образуван от ортоцентровете е квадрат, тогава и само тогава когато $BE \parallel CD$ и разстоянието между тях е равно на $\dfrac{BE + CD}{2}$.

Задача 3. На дъска е написано числото 1. На всеки ход Поли изтрива последното записано число n и на негово място записва едно от числата $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2$. Възможно ли е с тези операции на дъската да се получи число кратно на 2015.

Задача 4. Квадрат 4×4 е разделен на 16 единични квадратчета, във всяко от които е записана нула или единица. За един ход се избира ред или стълб на квадрата и се променят числата в него (нулите стават единици, а единиците стават нули). Квадратът се нарича *занулен*, ако броят на нулите в него не може да се намали. Броят на нулите в един занулен квадрат се нарича *степен на квадрата*. Намерете възможните стойности на степента.