Първо контролно за МБОМ, София, 11 май 2019

Задача 1. Да се намерят всички двойки естествени числа $(m;n)$, такива че $m^3-2^n=3311$.

Решение. По модул 7 остатъкът на m^3 е 0, 1 или 6, на 2^n е 1, 2 или 4, а на 3311 е 0, така че трябва остатъкът на 2^n да е 1, което се случва при $n=3k$. Получаваме $m^3-2^{3k}=3311$, т.е.

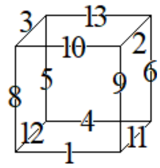
$$(m-2^k)(m^2+m.2^k+2^{2k})=7.11.43.$$

Вторият множител е по-голям от квадрата на първия, така че имаме само вариантите:

- $m-2^k=1$; $m^2+m.2^k+2^{2k}=3311$, $m^2-2.m.2^k+2^{2k}=1$, $3.m.2^k=3310$: абсурд;
- $m-2^k=7$; $m^2+m.2^k+2^{2k}=473$, $m^2-2.m.2^k+2^{2k}=49$, $3.m.2^k=424$: абсурд;
- $m-2^k=11$; $m^2+m.2^k+2^{2k}=301$, $m^2-2.m.2^k+2^{2k}=121$, $3.m.2^k=180$, което предвид първото равенство води до $m=15$, $k=2$, $n=6$.

Задача 2. На ръбовете на куб (по едно на ръб) са записани 12 различни естествени числа, най-голямото от които е g, а най-малкото е m. Сборът от числата на трите ръба през всеки връх е един и същ. Намерете най-малката възможна стойност на $g-m$.

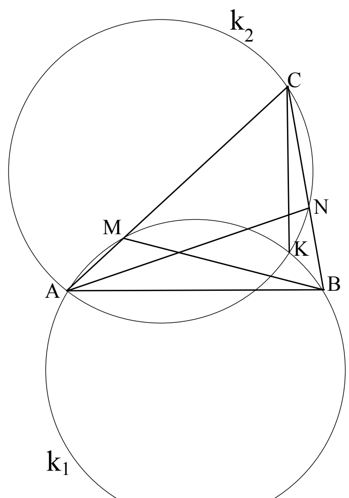
Решение. Явно $g-m\geq 11$. Ако допуснем, че $g-m=11$, то удвоеният сбор на числата по ръбовете $2(12m+1+2+...+11)=24m+132$ е равен на сбора във върховете, така че се дели на 8, т.е. 8 дели 132: абсурд. Вдясно има пример с $g-m=12$.

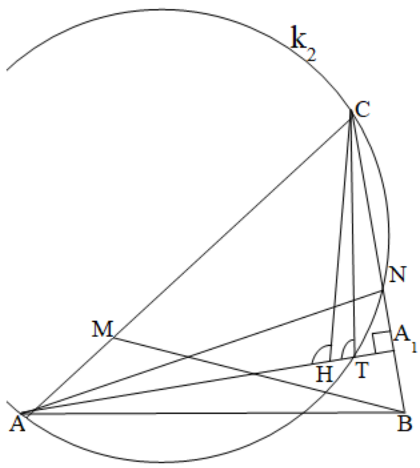


Задача 3. Намерете най-голямата стойност на израза $\dfrac{\sqrt{a-1}}{a+b}+\dfrac{\sqrt{b-1}}{b+c}+\dfrac{\sqrt{c-1}}{c+a}$, ако реалните числа a, b, c са не по-малки от 1.

Решение. Според САСГ $\dfrac{\sqrt{a-1}}{a+b}\leq\dfrac{\sqrt{a-1}}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{b}}\leq\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$. Събирайки с аналогичните $\dfrac{\sqrt{b-1}}{b+c}\leq\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$, $\dfrac{\sqrt{c-1}}{c+a}\leq\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$, заключаваме, че изразът е не по-голям от ¾. Равенство се достига за $a=b=c=2$.

Задача 4. Страните AB и AC на остроъгълния триъгълник ABC са хорди съответно в окръжностите k_1 и k_2; k_1 пресича страната AC във вътрешна точка M, а k_2 пресича страната BC във вътрешна точка N, като $AB=AN$, $BC=BM$. Ако k_1 и k_2 се пресичат за втори път в точка K и $\measuredangle ACK=50°$, да се пресметне големината на $\measuredangle BAC$.





Решение. Нека ъглите на ΔABC са съответно α, β, γ. Ще докажем, че височината AA_1 през върха A пресича k_2. Наистина, ако AA_1 не пресича k_2, то мярката на $\measuredangle A_1AN=\frac{180^0-2\beta}{2}=90^0-\beta$ е по-голяма или равна на половината от мярката на дъгата AN, т.е $90^0-\beta\geq\gamma\Leftrightarrow\beta+\gamma\leq 90^0\Leftrightarrow\alpha\geq 90^0$. Противоречие.

Нека AA_1 пресича k_2 в точка T. От $AB=AN$ следва $\measuredangle ANC=180°-\beta$. Тогава $\measuredangle ATC=\measuredangle ANC=180°-\beta$. Да построим и височината CC_1 през върха C. Нека тя пресича AA_1 в точка

H. От четириъгълника HC_1BA_1 получаваме $\measuredangle AHC = \measuredangle A_1HC_1 = 360° - 90° - 90° - \beta = 180° - \beta$, което (предвид факта, че H и T лежат на AA_1) е възможно само когато $H \equiv T$. Така доказахме, че ортоцентърът H на ΔABC лежи на k_2. Аналогично доказваме, че H лежи и на k_1, т.е точка K от условието на задачата е от височината CC_1. Сега вече лесно намираме, че $\measuredangle BAC = 40°$.

Второ контролно за МБОМ, София, 12 май 2019

Задача 5. Окръжност е разделена на равни дъги чрез 24 точки. За кое най-голямо k съществува изпъкнал k-ъгълник с върхове сред тези точки, никои две страни на който не са успоредни?

<u>*Решение.*</u> Нека точките са поред $A, B, C, \ldots, X$. Ако са избрани четирите върха на някой от $ABMN$, $CDOP$, $EFQR$, $GHST$, $IJUV$, $KLWX$, то в k-ъгълника има две успоредни страни. Следователно трябва $k \leq 6.3 = 18$. За $k = 18$ да вземем $ABCDEFGHIJKLMOQSUW$; ако има успоредни страни, те трябва да са от различни страни на диаметъра AM. Но от едната му страна върховете са поредни, а от другата са през един, така че двете свързващи дъги не могат да са равни, понеже се състоят от общо нечетен брой единични дъгички: абсурд.

Задача 6. Да се намерят всички двойки цели числа $(x;y)$, такива че

$$2x^4 + 4y^4 + (10y+1)x^2 + (4x+25)y^2 = 2019.$$

<u>*Решение.*</u> Записваме условието във вида

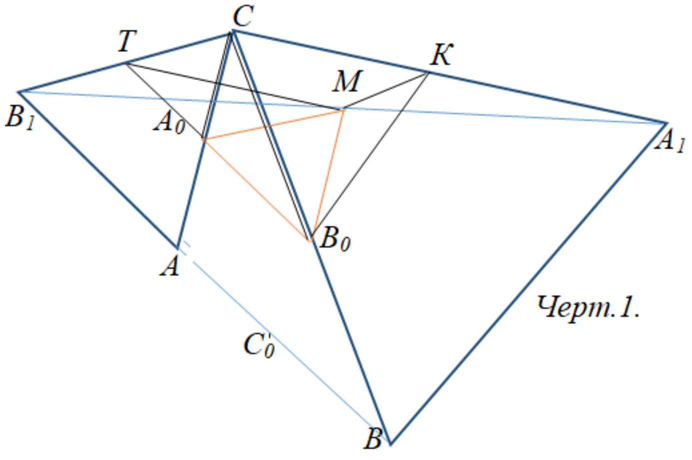
$$x^4 + x^4 + 10x^2y + 25y^2 + x^2 + 4xy^2 + 4y^4 = 2019$$

$$x^4 + (x^2+5y)^2 + (x+2y^2)^2 = 2019.$$

При $|x| \geq 7$ лявата страна е поне 2401: абсурд. Също по модул 4 остатъкът на 2019 е 3, а на точните квадрати е 0 или 1, така че събираемите вляво са нечетни, в частност x е нечетно. По модул 5 остатъкът на 2019 е 4, на x^4 е 0 или 1 (защо?), а на точните квадрати е 0, 1 или 4. Имаме $x^2 \equiv x^2 + 5y \pmod 5$, така че $x^4 \equiv (x^2+5y)^2 \pmod 5$ и е възможно само $x^4 \equiv 0 \pmod 5$. Тогава $x = \pm 5$ и в уравнението $(25+5y)^2 + (2y^2 \pm 5)^2 = 1394$ вторият квадрат е нечетен, така че първият е нечетен, кратен на 5 и не по-голям от 1394, т.е. някое от числата 5^2, 15^2, 25^2 и 35^2. Проверката дава решенията $(5;2)$ и $(5;-4)$.

Задача 7. На страните BC, CA и AB на ΔABC извън ΔABC са построени равностранните ΔBCA_1, ΔCAB_1 и ΔABC_1. Права m през средата M на отсечката A_1B_1 е перпендикулярна на правата AB. Права n през средата N на B_1C_1 е перпендикулярна на BC. Права p през средата P на C_1A_1 е перпендикулярна на CA. Докажете, че m, n и p минават през една точка.

<u>*Решение.*</u> Нека A_0, B_0, C_0, K и T са средите съответно на BC, CA, AB, CA_1 и CB_1 По I признак ΔA_0CB_0, ΔA_0TM и ΔMKB_0 са еднакви, така че ΔMA_0B_0 е равностранен и m е симетрала за A_0B_0, т.е. тя съдържа центъра O на описаната окръжност около $\Delta A_0B_0C_0$. По същите причини n и p съдържат O.



Черт.1.

Задача 8. а) Съществуват ли реални многочлени P, Q, R на променливите x, y, z такива, че за всички реални стойности на променливите е изпълнено

$$(x+2018y+2019z)^2.P+(x+2019y+2018z)^2.Q+(x+y+z+2019)^2.R=2019^2?$$

б) Съществуват ли реални многочлени A, B и C на променливите x, y такива, че за всички реални стойности на променливите е изпълнено $(x+y+2019)^2.A+x^2.B+y^2.C=2019^2$?

(*Припомняме, че реален едночлен на променливите x, y, z е израз от вида $Kx^m y^n z^p$, където K е реално число, а m, n, p са цели неотрицателни числа, а реален многочлен на тези променливи е сума на краен брой (възможно един) реални едночлени.*)

Решение. а) Не, при $x=-2y-2019$, $z=y=\frac{2019}{4035}$ бихме получили абсурда $0.(P+Q+R)=2019^2$.

б) Ако заменим x с $2019x$, y с $2019y$ и съкратим полученото на 2019^2, трябва да осигурим $(x+y+1)^2A+x^2B+y^2C=1$. Ако умножим $(x+y+1)^2=x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$ по $1-2xy-2x-2y$, полученото можем да представим във вида $Px^2+Qy^2+1-8xy$ за подходящи многочлени P, Q. Ако сега умножим по $1+8xy$, полученото можем да представим във вида $-Bx^2-Cy^2+1$.