

# Министерство на образованието и науката

## Съюз на математиците в България

### Първо контролно за определяне на националния отбор за МБОМ 2023

7 май 2023 г.

**Задача 1.** Изпъкналият петогълник  $ABCDE$  е такъв че  $BC = DE$ ,  $BE \parallel CD$  и  $AB \parallel DE$ . Ако окръжността през средите на отсечките  $BD$ ,  $CE$  и  $AE$  се допира до  $AE$ , то да се докаже, че  $ABCDE$  е вписан в окръжност.

**Задача 2.** Неотрицателните реални числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  са такива, че  $ab + bc + ca = 3$ . Да се намери най-голямата възможна стойност на израза

$$\frac{27 \left( \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \right)^2}{(a + b + c)^3} - \frac{a + 3}{b + c} - \frac{b + 3}{a + c} - \frac{c + 3}{a + b}$$

както и всички тройки  $(a, b, c)$ , при които тя се достига.

**Задача 3.** Намерете всички естествени числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и прости числа  $p$  и  $q$ , такива че:

- $c$  не се дели на 4 и  $p$  не дава остатък 11 при деление на 16;
- изпълнено е равенството  $p^a q^b - 1 = (p + 4)^c$ .

**Задача 4.** Дадено е множество от  $n \geq 5$  души и  $m$  различни тричленни комисии сред тези хора. Няма две комисии с точно един общ участник. Намерете най-голямото възможно  $m$  (в зависимост само от  $n$ ).

*Време за работа: 4 часа и 30 минути  
Успех!*