Министерство на образованието и науката

Съюз на математиците в България

Трето контролно за определяне на националния отбор за МБОМ 2023

14 май 2023 г.

Задача 9. На дъската са записани в червено всички прости числа, по-малки или равни на n, а в синьо са записани всички възможни суми на две различни червени числа. За кои естествени $n \geq 3$ произведението на всички сини числа се дели на произведението на естествените числа от 1 до n включително?

Задача 10. По брега на кръгъл остров без шосета има осем различни града. Трябва да се построят пет прави двупосочни шосета, които да не се пресичат, така че от всеки град да тръгват едно или две шосета. По колко начина може да стане това?

Задача 11. Даден е неравнобедрен триъгълник ABC с описана окръжност k, център I на вписаната окръжност и център I_C на външновписаната окръжност срещу върха C. Точката M е средата на страната AB, а точката N е средата на дъгата $\widehat{AB}$ от k, която съдържа C. Да се докаже, че $\angle IMI_C + \angle INI_C = 180^\circ$.

Задача 12. Нека n е естествено число. Първоначално на дъската е записано n пъти числото 2. За един ход избираме две числа a и b на дъската, изтриваме ги и на тяхно място записваме числото $\sqrt{\dfrac{ab+1}{2}}$. След $n-1$ хода на дъската остава едно число.

а) Да се докаже, че без значение какви са били ходовете, оставащото число ще е винаги по-голямо или равно на $\sqrt{\dfrac{n+3}{n}}$.

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много n, за които равенство в а) не се достига без значение какви са ходовете, както и че съществуват безбройно много n, за които равенство в а) се достига при подходящ избор на ходовете.

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Успех!