Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„Акад. Стефан Додунеков“

София, 17 – 19.11.2023

София, 2023

Тема за 5. клас

Задача 1. Произведението на три двуцифрени числа a, b и c е равно на най-голямото четирицифрено число, което е кратно на 45 и се записва с четири различни нечетни цифри.

а) Колко е сборът на числата a, b и c?

б) Ако дробта $\frac{a}{b}$ е правилна и съкратима, кое число трябва да се прибави към числителя и знаменателя на дробта $\frac{a}{c}$, за да се получи дроб, равна на $\frac{c}{b}$?

Решение. а) **(3 точки)** Най-голямото четирицифрено число, което е кратно на 5 и на 9 и се записва с четири различни нечетни цифри, е 9315.

Тъй като $9315 = 3.3.3.3.5.23$, единственият начин да се представи като произведение на двуцифрени числа е $9315 = (3.3.3).(3.5).23 = 27.15.23$.

Сборът на числата a, b и c е $15 + 23 + 27 = 65$.

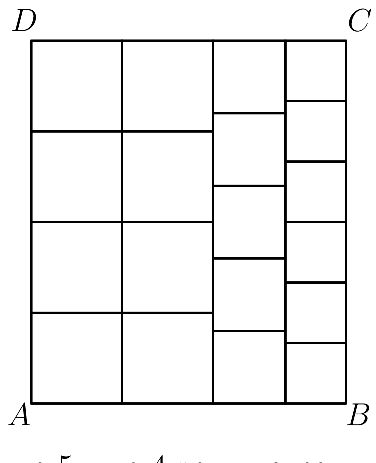
б) **(3 точки)** Числата a, b и c са 15, 23 и 27 в някакъв ред. Дробта $\frac{a}{b}$ е правилна и съкратима само когато $a = 15$, $b = 27$. Следователно $c = 23$.

Когато към числителя и знаменателя на дробта $\frac{a}{c} = \frac{15}{23}$ се прибави едно и също число, разликата между числителя и знаменателя ще се запази и ще е $23 - 15 = 8$.

В дробта $\frac{c}{b} = \frac{23}{27}$ разликата между числителя и знаменателя е $27 - 23 = 4$. Като я разширим с 2, ще получим $\frac{23}{27} = \frac{46}{54}$, като в $\frac{46}{54}$ разликата между числителя и знаменателя е 8.

Числото, което трябва да се прибави към числителя и знаменателя на дробта $\frac{15}{23}$, за да се получи $\frac{46}{54}$, е $46 - 15 = 54 - 23 = 31$.

Задача 2. Правоъгълникът $ABCD$ има обиколка 2464 cm и е сглобен от 19 квадрата, както е показано на чертежа.



а) Намерете дължината и широчината на правоъгълника $ABCD$.

б) Най-малко на колко еднакви квадрата може да се разреже правоъгълникът $ABCD$?

Решение. а) **(3 точки)** Страната BC е разделена на 6, на 5 и на 4 равни отсечки. Тъй като $\text{НОК}(6, 5, 4) = 60$, да означим $BC = 60x$.

Страната на най-големите квадрати е $(60x) : 4 = 15x$, страната на средните квадрати е $(60x) : 5 = 12x$, а страната на най-малките квадрати е $60x : 6 = 10x$. Тогава $AB = 2 \cdot 15x + 12x + 10x = 52x$.

Обиколката на правоъгълника е $2464 = 2.(60x + 52x)$, откъдето $1232 = 112x$ и намираме $x = 1232 : 112 = 11$.

Страните на правоъгълника са $AB = 52.11 = 572$ cm, $BC = 60.11 = 660$ cm.

б) **(3 точки)** Най-големите еднакви квадрати, с които може да се покрие правоъгълникът $ABCD$, имат страна, равна на НОД$(572, 660) = 44$ cm. Техният брой е

$$(572 : 44).(660 : 44) = 13.15 = 195.$$

Задача 3. Професор Попов наблюдава през телескопа си галактика EMT2023. В нея около звездата MAT1 се въртят четири планети – Делимо, Делител, Частно и Остатък. Професорът забелязал, че на 18.11.2023 г. планетите са наредени в една линия. Той знае, че планетата Делимо прави пълна обиколка и се връща на същото място на всеки 3 земни дни, планетата Делител – на всеки 20 дни, планетата Частно – на всеки 60 дни, а планетата Остатък – на всеки 30 дни.

а) На коя дата четирите планети за пръв път ще са отново на първоначалните си места (от 18.11.2023 г.), подредени в една линия?

б) Професорът изчислил, че когато планетата Делимо направи A пълни обиколки, планетата Делител направи B пълни обиколки, планетата Частно направи C пълни обиколки, а планетата Остатък направи D пълни обиколки и отново застанат на първоначалните си места, то за пръв път броят на обиколките наистина ще са делимо, делител, частно и остатък, т.е. $A : B = C$(ост. D). На коя дата ще стане това?

Решение. а) **(3 точки)** Четирите планети застават на първоначалните си места на всеки НОК(3, 20, 60, 30) = 60 дни. Следователно за пръв път ще бъдат отново там 60 дни след 18.11.2023, на 17.01.2024 г.

б) **(4 точки)** Планетите ще бъдат на първоначалните си места след 60, 120, 180, 240, 300, 360 дни и т.н. Ще запишем в табличка колко обиколки е направила всяка от планетите за това време.

Планета	Брой обиколки					
	за 60 дни	за 120 дни	за 180 дни	за 240 дни	за 300 дни	за 360 дни
Делимо	20	40	60	80	100	120
Делител	3	6	9	12	15	18
Частно	1	2	3	4	5	6
Остатък	2	4	6	8	10	12

С непосредствена проверка установяваме, че за пръв път условието е изпълнено след 360 дни, защото $120 : 18 = 6$ (ост.12). Това ще се случи 360 дни след 18.11.2023, на 12.11.2024 г. (отбележете, че 2024 година е високосна и това е 6 дни преди 18.11.2024 г.).

Задача 4. Дадени са четири различни естествени числа a, b, c и d, за които са изпълнени условията:

- НОК$(a,\ b)$ =НОК$(c,\ d) = 2520$,
- НОД$(a,\ b)$ =НОД$(c,\ d) = 14$,
- числото a има 3 пъти повече делители, отколкото числото b,
- числото c има 3 пъти повече делители, отколкото числото d.

а) Намерете числата $a + c$ и $b + d$.

б) Колко числа, които не надхвърлят $a + c$, са взаимнопрости с $b + d$?

Решение. а) **(3 точки)** Тъй като $2520 = 2^3.3^2.5.7$ и $14 = 2.7$, числата с НОК 2520 и НОД 14 могат да са:

1. случай. 2.7 и $2^3.3^2.5.7$. Но 2.7 има $2.2 = 4$ делители, а $2^3.3^2.5.7$ има $4.3.2.2. = 48$ делители; това не са търсените числа.

2. случай. $2.7.3^2$ и $2^3.5.7$. Но $2.7.3^2$ има $2.2.3 = 12$ делители, а $2^3.5.7$ има $4.2.2. = 16$ делители; това не са търсените числа.

3. случай. $2.7.5$ и $2^3.3^2.7$. В този случай $2.7.5$ има $2.2.2 = 8$ делители, а $2^3.3^2.7$ има $4.3.2. = 24$ делители – 3 пъти повече от 8.

4. случай. $2.7.3^2.5$ и $2^3.7$. В този случай $2^3.7$ има $4.2 = 8$ делители, а $2.7.3^2.5$ има $2.2.3.2 = 24$ делители – 3 пъти повече от 8.

Следователно $a + c = 2^3.3^2.7 + 2.7.3^2.5 = 504 + 630 = 1134$ и $b + d = 2.5.7 + 2^3.7 = 70 + 56 = 126$.

б) **(4 точки)** Тъй като $b + d = 126 = 2.7.3^2$, взаимнопростите със 126 числа не се делят нито на 2, нито на 3, нито на 7.

Измежду естествените числа от 1 до 1134 търсим тези, които не се делят нито на 2, нито на 3, нито на 7.

Измежду естествените числа от 1 до 1134 има:

$1134 : 2 = 567$ четни;

$1134 : 3 = 378$ кратни на 3;

$1134 : 7 = 162$ кратни на 7;

$1134 : \text{НОК}(2, 3) = 1134 : 6 = 189$ кратни на 2 и на 3;

$1134 : \text{НОК}(2, 7) = 1134 : 14 = 81$ кратни на 2 и на 7;

$1134 : \text{НОК}(3, 7) = 1134 : 21 = 54$ кратни на 3 и на 7;

$1134 : \text{НОК}(2, 3, 7) = 1134 : 42 = 27$ кратни на 2, на 3 и на 7.

Следователно броят на числата от 1 до 1134, които се делят на 2, 3 или 7, е

$$567 + 378 + 162 - (189 + 81 + 54) + 27 = 810,$$

откъдето броят на числата от 1 до 1134, които не се делят нито на 2, нито на 3, нито на 7, е

$$1134 - 810 = 324.$$

Тема за 6. клас

Задача 1. Пресметнете числата a и b:

$$a = 2{,}023 \cdot 456 + 20{,}23 \cdot (-24{,}5) - 202{,}3 \cdot (-7{,}89)$$

$$b = \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 17}$$

и намерете числото x, за което е изпълнено равенството

$$5 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{5} - \cfrac{1}{5 - \cfrac{5}{x}}} = a \cdot b.$$

Решение. Намираме

$$a = 2{,}023 \cdot 456 + 20{,}23 \cdot (-24{,}5) - 202{,}3 \cdot (-7{,}89) = 2023 \cdot 0{,}456 - 2023 \cdot 0{,}245 + 2023 \cdot 0{,}789 =$$

$$= 2023 \cdot (0{,}456 - 0{,}245 + 0{,}789) = 2023 \cdot 1 = 2023;$$

$$b = \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 17} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{15} - \frac{1}{17}\right) =$$

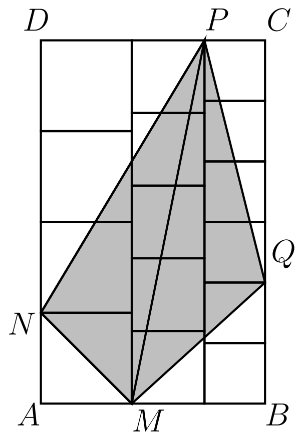
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{17}\right) = \frac{5}{119}, \qquad a \cdot b = 2023 \cdot \frac{5}{119} = 85;$$

$$5 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{5} - \cfrac{1}{5 - \cfrac{5}{x}}} = 85 \iff \cfrac{1}{\cfrac{1}{5} - \cfrac{1}{5 - \cfrac{5}{x}}} = -80 \iff \frac{1}{5} - \cfrac{1}{5 - \cfrac{5}{x}} = -\frac{1}{80} \iff$$

$$\cfrac{1}{5 - \cfrac{5}{x}} = \frac{17}{80} \iff 5 - \frac{5}{x} = \frac{80}{17} \iff \frac{5}{x} = \frac{5}{17} \iff x = 17.$$

Оценяване: по 2 точки за намиране на a, b и x.

Задача 2. Правоъгълникът $ABCD$ има лице 555 cm^2 и е сглобен от 15 квадрата, както е показано на чертежа.



а) Намерете обиколката на правоъгълника $ABCD$.

б) Намерете лицето на оцветените триъгълници MNP и MPQ.

в) Ако отсечките MP и NQ се пресичат в точка O, докажете, че O е среда на отсечката NQ.

Решение. а) **(2 точки)** Да означим $BC = a$. Тогава страните на квадратите са съответно $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{5}a$ и $\frac{1}{6}a$ и

$$AB = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)a = \frac{37}{60}a.$$

Ако $S_{ABCD} = 555 \text{ cm}^2$, то

$$a \cdot \frac{37}{60}a = 555 \iff a \cdot a = 555 : \frac{37}{60} = 900,$$

откъдето $a = 30$ cm. Страните на дадения правоъгълник са $BC = 30$ cm и $AB = \frac{37}{60} \cdot 30 = 18,5$ cm, а обиколката му е 97 cm.

б) **(2 точки)** Изразяваме

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{32}a^2, \quad S_{PDN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{5}a\right) = \frac{27}{160}a^2,$$

$$S_{PCQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}a \cdot \frac{4}{6}a = \frac{1}{18}a^2, \quad S_{MBQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}a \cdot \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{5}a\right) = \frac{11}{180}a^2,$$

$$S_{AMPD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}a\right) \cdot a = \frac{7}{20}a^2, \quad S_{MBCP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{6}a + \frac{1}{5}a\right) \cdot a = \frac{4}{15}a^2,$$

$$S_{MNP} = S_{AMPD} - S_{AMN} - S_{NPD} = \frac{7}{20}a^2 - \left(\frac{1}{32} + \frac{27}{160}\right)a^2 = \frac{7}{20}a^2 - \frac{1}{5}a^2 = \frac{3}{20}a^2,$$

$$S_{MPQ} = S_{MBCP} - S_{CPQ} - S_{MBQ} = \frac{4}{15}a^2 - \left(\frac{1}{18} + \frac{11}{180}\right)a^2 = \frac{4}{15}a^2 - \frac{7}{60}a^2 = \frac{3}{20}a^2.$$

Следователно $S_{MNP} = S_{MPQ} = \frac{3}{20} \cdot 30^2 = 135 \text{ cm}^2$.

в) **(2 точки)** Да означим с h разстоянието от P до NQ и с t – разстоянието от M до NQ. Тогава

$$S_{MNP} = S_{MNO} + S_{PNO} = \frac{1}{2} \cdot NO \cdot t + \frac{1}{2} \cdot NO \cdot h = \frac{1}{2} \cdot NO \cdot (h+t),$$

$$S_{MQP} = S_{MQO} + S_{PQO} = \frac{1}{2} \cdot QO \cdot t + \frac{1}{2} \cdot QO \cdot h = \frac{1}{2} \cdot QO \cdot (h+t).$$

От б) имаме $S_{MNP} = S_{MPQ}$, следователно $\frac{1}{2} \cdot NO \cdot (h+t) = \frac{1}{2} \cdot QO \cdot (h+t)$, от което следва, че $NO = QO$, т.е. O е среда на NQ.

Задача 3. На един остров живее популация от повече от 100 хамелеони. В понеделник на острова имало само червени и сини хамелеони.

Във вторник 25% от хамелеоните, които в понеделник били сини, станали червени, а 25% от хамелеоните, които в понеделник били червени, станали сини. Така се оказало, че 70% от хамелеоните на острова са сини.

В сряда на острова се родили 10 хамелеони, сини или червени. Така процентът на сините хамелеони на острова станал 68%.

а) Колко процента от хамелеоните на острова са били сини в понеделник?

б) Колко сини хамелеони се родили в сряда и колко хамелеони е имало на острова след това?

в) В четвъртък се срещнали син и червен хамелеон и двата едновременно се оцветили в жълт цвят. По-нататък при всяка среща на два разноцветни хамелеони, те се оцветявали едновременно в третия цвят. Например, ако се срещнели жълт и червен хамелеон, и двата се превръщали в сини. Възможно ли е в края на деня на острова да е имало равен брой червени и жълти хамелеони?

Решение. а) **(2 точки)** Нека в понеделник имало x сини и y червени хамелеони. Във вторник са $75\%x + 25\%y$ сини и $75\%y + 25\%x$ червени хамелеони. Така

$$70\%(x + y) = 75\%x + 25\%y \iff x = 9y.$$

Следователно в понеделник имало $x = 9y$ сини и y червени хамелеони; общо $10y$, от които сините са били 90%.

б) **(3 точки)** Тъй като броят на хамелеоните е естествено число, то $25\%y = \dfrac{y}{4}$ е естествено, т.е. $y = 4a$, където a е естествено число. Изразяваме $x = 36a$; общо има $4a + 36a = 40a$ хамелеони. Във вторник стават $75\% \cdot 36a + 25\% \cdot 4a = 28a$ сини и $75\% \cdot 4a + 25\% \cdot 36a = 12a$ червени хамелеони.

В сряда на острова се родили 10 хамелеони и те стават общо $40a + 10$, от които сините са $68\% = \dfrac{17}{25}$. Ако от новородените хамелиони b са сини, $b \leqq 10$, имаме

$$28a + b = \frac{17}{25} \cdot (40a + 10) \iff 20a + 25b = 170 \iff 4a + 5b = 34.$$

Числото b е четно, не се дели на 4, и не надхвърля 6. Следователно $b = 2$, $a = 6$ или $b = 6$, $a = 1$. Във втория случай хамелеоните стават общо 50, а са повече от 100. Следователно $b = 2$, $a = 6$, което означава, че са се родили 2 сини и 8 червени хамелеони, а общо са станали $40 \cdot 6 + 10 = 250$ хамелеони.

в) **(2 точки)** Преди срещата на синия и червения хамелеон в четвъртък е имало $\dfrac{17}{25} \cdot 250 = 170$ сини, $250 - 170 = 80$ червени и 0 жълти хамелеони.

Нека до края на деня е имало x срещи на жълт и червен, y срещи на жълт и син и z срещи на син и червен хамелеон (x, y, z са естествени числа или 0). Тогава червените са станали $80 - x + 2y - z$, а жълтите са станали $2z - x - y$. Равенството

$$80 - x + 2y - z = 2z - x - y \iff 80 = 3(z - y)$$

е невъзможно, тъй като 80 не се дели на 3.

Задача 4. Том Сойер трябва да боядиса 10 поредни дъски от една ограда, като изпълни следните изсиквания:

- всяка дъска да е оцветена в бял, син или червен цвят;
- първата и десетата дъски да са бели;
- от две съседни дъски най-много една да е бяла.

а) По колко различни начина Том Сойер може да оцвети оградата?

б) Колко са възможните оцветявания, при които има повече сини, отколкото червени дъски на оградата?

Решение. а) **(4 точки)** Тъй като от всеки две съседни дъски най-много една е бяла, белите дъски са най-много 5. Тъй като крайните са бели, броят на белите дъски е 2, 3, 4 или 5.

Ако белите дъски са две, първата и десетата, цветът на всяка от останалите 8 дъски може да се избере по 2 начина и получаваме 2^8 оцветявания.

Нека белите дъски са три. Втората и деветата не са бели, значи вътрешната бяла дъска е с номер 3, 4, 5, 6, 7 или 8, т.е. нейната позиция може да се избере по 6 начина. При всеки такъв избор останалите 7 дъски се оцветяват в син или червен цвят по 2^7 начина. Получаваме $6 \cdot 2^7$ оцветявания.

Нека белите дъски са четири. Вътрешните две бели дъски може да са с номера: $(3, a)$, където $a = 5, 6, 7$ или 8; $(4, a)$, където $a = 6, 7$ или 8; $(5, a)$, където $a = 7$ или 8; $(6, 8)$. Следователно позицията на двете вътрешни бели дъски може да се избере по $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ начина. При всеки такъв избор останалите 6 дъски се оцветяват в син или червен цвят по 2^6 начина. Получаваме $10 \cdot 2^6$ оцветявания.

Нека белите дъски са пет. Вътрешните три бели дъски може да са с номера: $(3, 5, 7)$, $(3, 5, 8)$, $(3, 6, 8)$, $(4, 6, 8)$. Следователно позицията на трите вътрешни бели дъски може да се избере по 4 начина. При всеки такъв избор останалите 5 дъски се оцветяват в син или червен цвят по 2^5 начина. Получаваме $4 \cdot 2^5$ оцветявания.

Общо оцветяванията са

$$2^8 + 6 \cdot 2^7 + 10 \cdot 2^6 + 4 \cdot 2^5 = 1792.$$

б) **(3 точки)** Първо ще преброим оцветяванията с равен брой червени и сини дъски. Това е възможно само в случаите, когато белите дъски са 2 или 4.

Ако белите дъски са две, първата и десетата, сред останалите 8 дъски мястото на четирите сини може да се избере по $\dfrac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = 70$ начина.

Ако белите дъски са четири, първата, десетата и две вътрешни, мястото на вътрешните може да се избере по 10 начина (както видяхме в а). При всяки от тези 10 варианта сред останалите 6 дъски мястото на трите сини може да се избере по $\dfrac{6.5.4}{3.2.1} = 20$ начина. Така получаваме $10 \cdot 20 = 200$ начина.

Следователно при $70 + 200 = 270$ оцветявания има равен брой червени и сини дъски.

На всяко оцветяване C с повече сини, отколкото червени дъски, можем да съпоставим оцветяване $C^\star$ с повече червени, отколкото сини дъски, като в C преоцветим сините в червени и червените в сини. По този начин оцветяванията с различен брой червени и сини дъски се разделят по двойки; в половината от тези оцветявания, т.е. $\dfrac{1792 - 270}{2} = 761$, сините дъски са повече от червените.

Тема за 7. клас

Задача 1. В правоъгълна координатна система Oxy с единична отсечка 1 cm започват да се движат едновременно точките A и B. Точка A тръгва от $(-6; 0)$ и се движи по абсцисната ос в положителна посока със скорост 2 cm/min. Точка B тръгва от $(0; 4)$ и се движи по ординатната ос в отрицателна посока със скорост 1 cm/min.

а) Колко сантиметра е дължината на отсечката AB, когато са изминали точно 9 минути след началото на движението?

б) Ако с S е означено разстоянието между A и B точно n минути след тръгването им, изразете S^2 чрез n и представете S^2 като многочлен в нормален вид.

в) Колко минути след тръгването на точките A и B разстоянието между тях ще е минимално?

Решение. а) Девет минути след началото на движението A е в точката $(12; 0)$, а B е в точката $(0; -5)$. От теоремата на Питагор за $\triangle OAB$ следва, че $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 12^2 + 5^2 = 169 = 13^2$. Следователно $AB = 13$ cm.

б) При $n = 3$, $OA = 0$, $OB = 1$ cm, $AB = 1$ и $S^2 = 1$.

При $n = 4$, $OB = 0$, $OA = 2$ cm, $AB = 2$ и $S^2 = 4$.

При $n \neq 3$ и $n \neq 4$, $OA = |2n - 6|$ и $OB = |n - 4|$. Тогава от $\triangle OAB$ според теоремата на Питагор следва, че

$$S^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = (2n-6)^2 + (n-4)^2 = 5n^2 - 32n + 52.$$

Резултатът остава в сила и за частните случаи $n = 3$ и $n = 4$.

Отговор. $5n^2 - 32n + 52$.

в) Тъй като

$$S^2 = 5n^2 - 32n + 52 = 5(n^2 - 2 \cdot 3{,}2n + 10{,}24) + 0{,}8 = 5(n - 3{,}2)^2 + 0{,}8$$

и $(n - 3{,}2)^2 \geqq 0$, то S ще е минимално при $n = 3{,}2$.

Оценяване. а) 1 точка; б) 3 точки; в) 2 точки.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = c$ cm, $BC = a$ cm, $CA = b$ cm и за които е изпълнено равенството

$$26a^2 + 25b^2 + 25c^2 + 25 = 10a(3b + 4c + 1).$$

а) Да се намери лицето на триъгълника ABC.

б) Построени са права m през върха A, успоредна на BC, точка P върху страната AC така, че $AP : PC = 1 : 2$ и пресечната точка D на правите m и BP. Намерете лицето на четириъгълника $ABCD$.

Решение. а) Преобразуваме израза до

$$(a-5)^2 + (3a-5b)^2 + (4a-5c)^2 = 0.$$

Тъй като $(a-5)^2 \geqq 0$, $(3a-5b)^2 \geqq 0$, $(4a-5c)^2 \geqq 0$, то равенството е възможно само при $a - 5 = 3a - 5b = 4a - 5c = 0$, откъдето намираме, че $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$. И тъй като $a^2 = b^2 + c^2$, даденият триъгълник е правоъгълен с хипотенуза a и катети b и c, откъдето следва, че лицето му $S = \dfrac{bc}{2} = \dfrac{3.4}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

б) Намираме $AP = \dfrac{1}{3} \cdot AC = 1$ cm, $PC = 2$ cm, $S_{APB} = \dfrac{1 \cdot 4}{2} = 2 \text{ cm}^2$ и $S_{CPB} = 6 - 2 = 4 \text{ cm}^2$.

В трапеца $CBAD$ имаме равенството на лицата $S_{DPC} = S_{APB} = 2 \text{ cm}^2$. От

$$\frac{S_{DPC}}{S_{DPA}} = \frac{PC}{PA} = \frac{S_{BPC}}{S_{BPA}}$$

намираме $S_{DPA} = \dfrac{2 \cdot 2}{4} = 1 \text{ cm}^2$ и тогава $S_{ABCD} = 6 + 2 + 1 = 9 \text{ cm}^2$.

Оценяване. а) 4 точки: за представяне на израза като сбор на квадрати – 2 точки; обосновка и намиране на a, b, c – 1 точка; обосновка на правоъгълния триъгълник и намиране на лицето – 1 точка; б) 2 точки.

Задача 3. За всяко естествено число n означаваме

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n.$$

а) Намерете сбора на всички различни прости делители на S_{23}.

б) Докажете, че стойността на израза

$$A = S_{2023} + \frac{S_{2023} + 1}{2^{1012}} + 2$$

не е просто число.

в) Намерете всички естествени числа n, за които съществува цяло число k, за което

$$S_n = 1 + 3^k + 7^k.$$

Решение. Имаме

$$1 + 2S_n = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = S_n + 2^{n+1},$$

т.е. $1 + 2S_n = S_n + 2^{n+1}$, откъдето следва, че $S_n = 2^{n+1} - 1$.

а) Разлагаме на множители:

$$S_{23} = \left(2^{12}\right)^2 - 1 = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1) = (2^4 - 1)(2^8 + 2^4 + 1)(2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1) =$$

$$= 15.273.17.241 = 3.5.3.7.13.17.241.$$

Търсеният сбор е $3 + 5 + 7 + 13 + 17 + 241 = 286$.

б) Имаме

$$A = 2^{2024} - 1 + 2^{2024} : 2^{1012} + 2 = 2^{2024} + 2^{1012} + 1 = 2^{2024} + 2.2^{1012} + 1 - 2^{1012} =$$

$$= (2^{1012}+1)^2 - (2^{506})^2 = (2^{1012} - 2^{506} + 1)(2^{1012} + 2^{506} + 1),$$

с което е доказано, че A е произведение на две естествени числа, по-големи от 1.

в) Търсим естествени числа n и цели числа k, за които е изпълнено равенството

$$2^{n+1} - 1 = 1 + 3^k + 7^k \iff 2^{n+1} = 2 + 3^k + 7^k.$$

При $n = 1$ равенството е изпълнено при $k = 0$.

При $n \geqq 2$ лявата страна на равенството се дели на 8.

При нечетно k имаме $3^k \equiv 3 \pmod 8$, $7^k \equiv 7 \pmod 8$, следователно $2 + 3^k + 7^k \equiv 4 \pmod 8$ и равенството е невъзможно.

При четно k имаме $3^k \equiv 1 \pmod 8$, $7^k \equiv 1 \pmod 8$, следователно $2 + 3^k + 7^k \equiv 4 \pmod 8$ и отново равенството е невъзможно.

Следователно $n = 1$ е единственото решение.

Оценяване. Доказателство на формулата за S_n – 1 точка; а) 2 точки; б) 2 точки; в) 2 точки.

Задача 4. Дадени са числата

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3, \ldots,\ n,\ n$$

(всяко естествено число от 1 до n е записано по два пъти). Ще казваме, че една подредба на дадените числа е *хубава*, ако между двете единици в получената редица има точно едно число, между двете двойки има точно две числа и т.н., за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$ между двете числа k в редицата има точно k на брой числа.

Например, хубава подредба при $n = 3$ е $3,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2$, а хубава подредба при $n = 4$ е $4,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 2$.

а) Съществува ли хубава подредба при $n = 15$?

б) Докажете, че при $n = 2022$ не съществува хубава подредба на числата в дадената редица.

Решение. а) Една хубава подредба при $n = 15$ е:

$$12, 10, 8, 14, 5, 3, 1, 15, 1, 3, 5, 8, 10, 12, 7, 13, 11, 9, 14, 6, 4, 2, 7, 15, 2, 4, 6, 9, 11, 13.$$

б) Да допуснем, че съществува хубава подредба. Да номерираме позициите на дадените 4044 числа отляво надясно.

Нека a_1 е първата позиция, в която се появява числото 1; втората такава позиция е $a_1 + 2$.

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & \boxed{1} & \boxed{} & \boxed{1} & \ldots \\ & a_1 & a_1+1 & a_1+2 & \end{array}$$

Ако a_2 е първата позиция, в която се появява числото 2; втората такава позиция е $a_2 + 3$.

$$\begin{array}{cccccc} \ldots & \boxed{2} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{2} & \ldots \\ & a_2 & a_2+1 & a_2+2 & a_2+3 & \end{array}$$

Въобще за всяко $k = 1, 2, \dots, 2022$ позициите, в които се появява числото k в хубавата подредба означаваме с a_k и $a_k + k + 1$.

Сборът на всички позиции в редицата е равен на

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}) + (a_1 + 2 + a_2 + 3 + \cdots + a_{2022} + 2023) =$$

$$= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}) + 2 + 3 + \cdots + 2023 =$$

$$= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}) + \frac{2023 \cdot 2024}{2} - 1 =$$

$$= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}) + 2023 \cdot 1012 - 1.$$

От друга страна, този сбор е

$$1 + 2 + \cdots + 4044 = \frac{4044.4045}{2} = 2022 \cdot 4045.$$

Получихме, че

$$2022 \cdot 4045 = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}) + 2023 \cdot 1012 - 1,$$

което е невъзможно, тъй като лявата страна на равенството е четна, а дясната е нечетна.

Следователно при $n = 2022$ не съществува хубава подредба.

Забележка. По същия начин се доказва, че не съществува хубава подредба при $n = 4k + 1$ и $n = 4k + 2$.

Оценяване: а) 3 точки; б) 4 точки.