Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

София, 2023 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Нека a е най-голямата стойност на израза $24y - 9y^2$, където y е рационално число, а b е най-малкото цяло число, изпълняващо неравенството

$$(t+3)^3 - (6t-7)^2 - (t-9)^3 < 3.$$

Разложете на (неразложими) множители с цели коефициенти израза

$$a(x-1)x^3 + bx - 2x - 1.$$

Решение. Имаме $24y - 9y^2 = 16 - (3y-4)^2$, чиято най-голяма стойност $a = 16$ се достига за $y = \frac{4}{3}$. Даденото неравенство е еквивалентно с

$$t^3 + 9t^2 + 27t + 27 - 36t^2 + 84t - 49 - t^3 + 27t^2 - 243t + 729 < 3$$

$$-132t + 704 < 0,$$

т.е. $t > \frac{16}{3}$ и $b = 6$. Замествайки $a = 16$, $b = 6$ в дадения израз, получаваме

$$16(x-1)x^3 + 6x - 2x - 1 = 16x^4 - 16x^3 + 4x - 1$$

$$= (16x^4 - 1) - 4x(4x^2 - 1) = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1) - 4x(4x^2 - 1)$$
$$= (4x^2 - 4x + 1)(2x - 1)(2x + 1) = (2x - 1)^3(2x + 1).$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за обосновано намиране на a; 2 т. за обосновано намиране на b; 2 т. за разлагане до неразложими множители и то само при правилно намерени a, b.

Задача 8.2. Изпъкнал четириъгълник ще наричаме *иновативен*, ако диагоналите му го разделят на четири триъгълника с едни и същи мерки на ъглите. Например квадратът е иновативен четириъгълник, понеже четирите триъгълника са с мерки 90°, 45°, 45°. Да се намерят мерките на ъглите на иновативен четириъгълник, ако една от тях е 13°.

Отговор. $90^\circ, 90^\circ, 167^\circ, 13^\circ$ или $13^\circ, 167^\circ, 13^\circ, 167^\circ$

Решение. Нека четириъгълникът е $ABCD$ с $\sphericalangle BAD = 13^\circ$ и диагоналите AC и BD се пресичат в O. Ако допуснем, че диагоналите не са перпендикулярни, то при $\sphericalangle AOB > 90^\circ$ (случаят $\sphericalangle AOD > 90^\circ$ е аналогичен) имаме $\sphericalangle AOB > 90^\circ > \sphericalangle AOD$ и $\sphericalangle AOB > \sphericalangle OAD$, $\sphericalangle AOB > \sphericalangle ODA$ (понеже $\sphericalangle AOB$ е външен ъгъл за триъгълника AOD), т.е. мярката на $\sphericalangle AOB$ не се среща в триъгълника AOD, противоречие. Така AC и BD са перпендикулярни. Нататък, ако $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ADO$, то $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAO + \sphericalangle OAD = \sphericalangle BAO + 90^\circ - \sphericalangle ADO = 90^\circ$, противоречие с $\sphericalangle BAD = 13^\circ$. Така остава само възможността $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$, като в такъв случай AC разполовява $\sphericalangle BAD$, т.е. AC е симетрала на BD. Сега от триъгълниците AOD и DOC следва или $\sphericalangle ADO = \sphericalangle CDO$ (в такъв случай BD е симетрала на AC и $ABCD$ е ромб), или $\sphericalangle ADO = \sphericalangle DCO = 90^\circ - \sphericalangle CDO$, т.е. $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, аналогично $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ и четвъртият ъгъл е $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \sphericalangle BAD$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за верен отговор, 2 т. за доказателство, че диагоналите са перпендикулярни (не се дават точки само за предполагане на този факт), 1 т. за обосновка, че единият от диагоналите разполовява два срещуположни ъгъла на четириъгълника, по 1 т. за всеки от двата случая за другия диагонал,

Задача 8.3. Да се намерят всички двойки (a, b) от взаимно прости естествени числа, такива че $a < b$ и b дели

$$(n+2)a^{n+1002} - (n+1)a^{n+1001} - na^{n+1000}$$

за всяко естествено число n.

Отговор. $(a, b) = (3, 5)$.

Решение. Понеже a и b са взаимно прости, то такива са b и a^{n+1000}, съответно исканото е еквивалентно на b да дели $(n+2)a^2 - (n+1)a - n$ за всяко n. От $n = 1$ и $n = 2$ получаваме, че непременно b дели $3a^2 - 2a - 1$ и $4a^2 - 3a - 2$. Оттук b дели

$$4(3a^2 - 2a - 1) - 3(4a^2 - 3a - 2) = a + 2$$

и тъй като $3a^2 - 2a - 1 = 3(a-2)(a+2) - 2(a+2) + 15$, то непременно b дели 15.
Явно $b > a \geq 1$, т.е. $b \geq 2$. Ако $b = 15$, то $b \mid a + 2$ дава $a = 13$, но $4 \cdot 13^2 - 3 \cdot 13 - 2 = 635$ не се дели на 3. Ако $b = 3$, то $a = 1$, но $4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = -1$ не се дели на 3.
Остава $b = 5$, съответно $a = 3$. Действително, $(n+2) \cdot 3^2 - (n+1) \cdot 3^1 - n = 5(n+3)$ се дели на 5.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за верен отговор и проверката му; 6 т. за отхвърляне на всяка друга възможност, от които: 1 т. за свеждане до делимост на многочлени от най-много втора степен, 1 т. за фокусиране върху изрази от (поне две) малки $n \leq 4$, 1 т. за свеждане до делимост на два многочлена от най-много първа степен, 2 т. за извод от вида $b \mid 5p$, където p е просто число, 1 т. за отхвърляне на 1, p и $5p$, както и на $a \neq 3$ при $b = 5$.

Задача 8.4. Във всяко от полетата на квадратна таблица 9×9 е записано цяло число. За всеки k числа, намиращи се в един и същ ред (стълб), сборът им е в същия ред (стълб). Намерете най-малкия възможен брой нули в таблицата, ако:
а) $k = 5$;
б) $k = 8$.

Отговор. а) 63; б) 0.

Решение. а) Пример: номерираме редовете и стълбовете от 1 до 9. Записваме 1 в полетата $(i; i)$ $(i = 1, \ldots, 9)$; -1 в поле $(1; 9)$ и в полетата $(i; i-1)$ $(i = 2, \ldots, 9)$; 0 в останалите полета. Възможните сборове са 1, 0 и -1.
Оценка: Да предположим, че има поне 19 ненулеви числа. От принципа на Дирихле на някой ред ще има поне три ненулеви числа, а значи и поне две ненулеви числа с еднакъв знак, да речем положителни (ситуацията при отрицателни е аналогична). Да наредим числата в този ред по големина: $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_9$, където $a_9 \geq a_8 > 0$. Ако $a_5 \geq 0$, то $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geq a_8 + a_9 > a_9$ трябва да е на същия ред: абсурд. Ако $a_5 < 0$, то $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < a_1$ трябва да е на същия ред: абсурд.

б) Възможен пример без нули е както следва (работи, понеже $5.3+3.(-4) = 3$ и $4.3+4.(-4) = -4$):

3	3	3	3	3	−4	−4	−4	−4
−4	3	3	3	3	3	−4	−4	−4
−4	−4	3	3	3	3	3	−4	−4
−4	−4	−4	3	3	3	3	3	−4
−4	−4	−4	−4	3	3	3	3	3
3	−4	−4	−4	−4	3	3	3	3
3	3	−4	−4	−4	−4	3	3	3
3	3	3	−4	−4	−4	−4	3	3
3	3	3	3	−4	−4	−4	−4	3
3	3	3	3	3	−4	−4	−4	−4

Оценяване. (7 точки) а) 2 т. за работещ пример (ако проверката, че примерът работи, е неочевидна, тя трябва да присъства) и 2 т. за обоснована оценка; б) 3 т. за работещ пример (ако проверката, че примерът работи, е неочевидна, тя трябва да присъства).

Задача 9.1. Дадени са функциите $f(x) = |x-2|-|x-4|$ и $g(x) = |x-8|-2$. Да се пресметне лицето на фигурата с върхове, пресечните точки на графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ и пресечните точки на графиката на $g(x)$ с оста Ox.

Решение. Графиката на $g(x)$ се състои от два лъча с общ връх в $x = 8$. Разкриваме модула и лесно изчисляваме пресечните ѝ точки с оста Ox чрез уравненията $6 - x = 0$ и $x - 10 = 0$ - $A(6, 0)$ и $B(10, 0)$.
След разкриване на модулите в $f(x)$ виждаме че в интервала $(-\infty, 2)$ $f(x) = -2$, в интервала $[2, 4]$ $f(x) = 2x - 6$ и в интервала $(4, \infty)$ $f(x) = 2$.
Решаваме уравненията $f(x) = g(x)$ за всеки от трите интервала. Получаваме следните пресечни точки - $D(4, 2)$ и $C(12, 2)$.
От координатите следва, че фигурата $ABCD$ е трапец с основи 8 и 4 и височина 2. Следователно лицето му е $\frac{8+4}{2} = 12$.

Оценяване. (6 точки) 2т за пресечните точки на $g(x)$ с Ox. 2т. за пресечните точки на $g(x)$ с $f(x)$. 1т. за това че разглежданата фигура е трапец. 1т. за довършване.

Задача 9.2. Даден е тъпоъгълен равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$), около който е описана окръжност с център O. Точка P е произволна точка върху основата AB, такава че $AP < \frac{1}{2}AB$. Точка Q лежи на основата AB и $BQ = AP$. Окръжността с диаметър CQ пресича описаната около триъгълник ABC окръжност за втори път в точка E, а правите CE и AB се пресичат в точка F. Ако N е средата на CP и правите ON и AB се пресичат в точка D, да се докаже че точките O, D, C, F лежат на една окръжност.

Решение. Нека T е среда на CQ и нека означим $\measuredangle NOC = \measuredangle TOC = \alpha$. OT е перпендикулярна на CEзащото T е център на окръжността с диаметър CQ. Нека K е пресечна точка на

ON и CF. Намираме $\measuredangle OKC = \measuredangle OKF = 90 - 2\alpha$. От $\measuredangle PDN = \measuredangle PDK = 90 - \alpha$ намираме $\measuredangle DFC = \alpha$ т.е. $\measuredangle COD = \measuredangle CFD = \alpha$. Това завършва доказателството.

Оценяване. (6 точки) 2т. за въвеждане на $\measuredangle TOC$; 1т. за перпендикулярността; 1т. за $\measuredangle OKC = \measuredangle OKF = 90 - 2\alpha$; 1т. за $\measuredangle DFC = \alpha$; 1т. за довършване.

Задача 9.3. В къщата на богатата лейди Гилмор се случила кражба на една от най-скъпите й ценности: нейната перлена огърлица. Задачата за разплитането на мистерията паднала на плещите на инспектор Гудинаф. Той разполагал със следната информация: в деня на кражбата, в стаята с огърлицата били влизали 7 от слугите на лейди Гилмор, които ще наричаме A, B, C, D, E, F, G поради конфиденциалност на разследването. Всеки от тях твърди, че е присъствал в стаята само веднъж за неопределен период от време. Освен това A твърди, че е срещал B, C, F, G в стаята; B твърди, че е срещал A, C, D, E, F; C твърди, че е срещал A, B, E; E твърди, че е срещал B, C, F; F твърди, че е срещал A, B, D, E; G твърди, че е срещал A, D и D твърди, че е срещал B, F, G. Инспектор Гудинаф заключил, че точно един от слугите лъже. Кой е той?

Решение. Първо ще докажем следната лема.

Лема. Нека X, Y, Z и T са четирима от слугите. Ако е известно, че двойките X, Y; Y, Z; Z, T и T, X са били заедно в стаята в даден момент, то някоя от двойките X, Z и Y, T също са се засекли.

Доказателство на Лема. Нека без ограничение на общността допуснем, че Y и T не са били заедно в стаята и Y си е тръгнал от стаята преди T (останалите случаи са аналогични). Тогава, X и Z са стояли в стаята заедно в периода между напускането на Y и пристигането на T.

Да забележим, че A, C, E, F удовлетворяват условието на лемата, но никои от A, E и C, F не са се засякли. Същото важи за A, B, D, G. Единствен общ елемент на тези двойки е A. Остава да се уверим, че е възможно всички останали двойки да са се срещнали, както твърдят, влизайки точно по веднъж. Това е възможно при следната последователност от влизания и излизания: влиза G, влиза D, излиза G, влиза B, влиза F, излиза D, влиза E, излиза F, влиза C, излиза B, излиза E, излиза C.

Оценяване. (7 точки) 2т за твърдението на лемата; 2т за правилно доказателство на лемата; по 1т за всяка четворка, изобличаваща A; 1т за пример, че всички освен A казват истината.

Задача 9.4. Нека p и q са взаимнопрости цели числа и $|\frac{p}{q}| \leq 1$. Да се определи за кои стойности на p и q съществува представяне от вида

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$$

за краен брой четни числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Бележка: Това представяне се нарича верижна дроб и може да бъде означавано и като $[b_1, b_2, ..., b_n]$.

Решение.

Ще докажем че това е възможно точно когато едно от двете числа p и q е четно.

1) Необходимост. Ако всички b_i са четни, ще докажем че pq е четно. Ще използваме индукция по n. За $n = 1$ това е очевидно.

Нека направим следното представяне:

$$\frac{p}{q} = [b_1, ..., b_n] = \frac{1}{b_1 + [b_2, ..., b_n]} = \frac{1}{b_1 + \frac{p'}{q'}} = \frac{q'}{b_1 q' + p'}$$

Тук b_1 е четно и по индукционно допускане точно едно от p' и q' също е четно. Лесно се вижда това завършва доказателството на тази посока.

2) Достатъчност. Ще докажем, че съществуват такива четни числа $[b_1, ..., b_n]$ при pq четно. Отново ще ползваме индукция, но този път по $|q|$.

За $|q| = 2$ твърдението отново е очевидно.

Нека разгледаме числата $\left[\frac{q}{p}\right]$ и $\left[\frac{q}{p}\right]+1$. Едно от тях е четно. Да го наречем b и да отбележим, че не може да е 0. Числото $b - \frac{q}{p}$ е по-малко от единица и може да бъде записано като несъкратима дроб $\frac{p'}{q'} = b - \frac{q}{p}$ или алтернативно $\frac{p}{q} = \frac{1}{b + \frac{p'}{q'}}$, като $|q| > |q'|$. Сега аналогично на предния случай можем да докажем че $p'q'$ е четно и $\frac{p'}{q'}$ има необходимото представяне според индукционното допускане. Но тогава и $\frac{p}{q}$ има такова. Това завършва доказателството.

Оценяване. (7 точки) 1т за правилен отговор. 3т. за всяка посока на доказателството.

Бележка: Това твърдение, както и самите верижни дроби, имат приложение в теория на възлите. Също така е доказано и единственост на представянето, макар че това свойство не се иска в задачата.

Задача 10.1. Да се реши уравнението

$$(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + x\sqrt{x^2+1} = 0.$$

Решение. **Отговор:** $x = -\frac{1}{2}$.

Първи начин: Записваме уравнението във вида $(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} = -x\sqrt{x^2+1}$, забелязваме, че и двата израза под корен са строго положителни за всяко реално x, като освен това

$-x(x+1) \geq 0$, откъдето $x \in [-1, 0]$. Повдигаме на втора степен двете страни и преработваме:

$$\begin{aligned}(x^2+2x+1)(x^2+2x+2) &= x^2(x^2+1)\\ x^4+4x^3+7x^2+6x+2 &= x^4+x^2\\ 2x^3+3x^2+3x+1 &= 0\\ (2x+1)(x^2+x+1) &= 0.\end{aligned}$$

Тъй като $x^2+x+1 > 0$, то единственото възможно решение е $x = -\frac{1}{2}$. Тъй като $-\frac{1}{2} \in [-1, 0]$, то $x = -\frac{1}{2}$ действително е решение.

Втори начин: Полагаме $a = \sqrt{x^2+2x+2} > 0$ и $b = \sqrt{x^2+1} > 0$. Следователно

$$\begin{aligned}x = \frac{(x^2+2x+2)-(x^2+1)-1}{2} &= \frac{a^2-b^2-1}{2}\\ x+1 &= \frac{a^2-b^2+1}{2}.\end{aligned}$$

Уравнението е еквивалентно на:

$$\begin{aligned}\frac{a^2-b^2+1}{2}\cdot a + \frac{a^2-b^2-1}{2}\cdot b &= 0\\ (a^2-b^2)a + a + (a^2-b^2)b - b &= 0\\ (a-b)\left((a+b)^2+1\right) &= 0.\end{aligned}$$

Оттук, $a = b$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Оценяване. (6 точки) 2т. за $x \in [-1, 0]$; 2т. за извеждане на уравнението $2x^3+3x^2+3x+1 = 0$; 2т. за $x = -\frac{1}{2} \in [-1, 0]$. Ако е повдигнато на втора степен без да са направени ограничения, задачата се оценява най-много на 5т. (ако има проверка за $x = -\frac{1}{2}$).
Алтернативно: (6 точки) 2т. за полагане на a, b; 2т. за изразяване на x и $x+1$; 2т. за $a = b$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Задача 10.2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с център O на описаната окръжност. Точка P е върху страната BC, такава че $BP < \frac{1}{2}BC$. Точка Q е от страната BC такава, че $CQ = BP$. Правата AO пресича BC в точка D, а точка N е среда на AP. Описаната около триъгълник ODQ окръжност пресича за втори път описаната около триъгълник BCO окръжност в точка E. Правите NO и OE пресичат BC съответно в точки K и F. Да се докаже, че точките A, O, K, F лежат на една окръжност.

Решение. Нека AO пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка L, а описаната около $\triangle BOC$ окръжност в точка R. Да означим с X средата на BC, а с Y – диаметрално противоположната на O в описаната около $\triangle BOC$ окръжност. Нека OQ пресича за втори път описаната около $\triangle BOC$ окръжност в точка T.
Имаме $OX \cdot OY = OD \cdot OR = OQ \cdot OT = OE \cdot OF$. От последните три равенства лесно следва, че R, T, F лежат на една права. От $\sphericalangle ORF = \sphericalangle OQP = \sphericalangle QPO = \sphericalangle FPO$ следва,

че $OPRF$ е вписан и значи $PD \cdot DF = OD \cdot DR = DL \cdot DA$. Оттук, $APLF$ е вписан. Но $PL \parallel NO$ (тъй като NO е средна отсечка в $\triangle PLA$) и значи $AOKF$ също е вписан.

Оценяване. (6 точки) 2т. за $OX \cdot OY = OD \cdot OR = OQ \cdot OT = OE \cdot OF$; 3т. за $APLF$ вписан; 1т. за довършване.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа k със следното свойство: Съществува полином $f(x)$ с рационални коефициенти, такъв че за всяко естествено число $n > 2023^{2023}$

$$f(n) = \text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k).$$

Решение. При $k = 1$ и $k = 2$ търсените полиноми са съответно $f(x) = x + 1$ и $f(x) = (x+1)(x+2)$. Нека $k \geq 3$ и да допуснем, че съществува такъв полином $f(x)$. За всяко просто число p, степента му в $\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k)$ е $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, където α_i е степента на p в каноничното представяне на $n+i$, $i = 1, \dots, k$. Ако това е примерно α_s, то тя би се получила ако вземем

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{p^{\alpha_1}p^{\alpha_2}\cdots p^{\alpha_{s-1}}p^{\alpha_{s+1}}\cdots p^{\alpha_k}},$$

като е ясно, че степените на p в знаменателя са делители на $\displaystyle\prod_{1\leq i\neq s\leq k}(s-i)$. Следователно

$$\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{C_n}, \qquad (1)$$

където C_n е делител на $\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq k}(j-i)$. Понеже C_n може да приема краен брой допустими стойности, ще има естествено число C такова, че за безброй много n, $f(n) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{C}$. Значи за безброй много x $f(x) = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}{C}$, откъдето

$$f(x) \equiv \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Следователно

$$\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Да допуснем, че това е възможно. Да изберем просто число $p < k$ такова, че p не дели k. Нека $n + k + 1 = p^m$ за достатъчно голямо m. От горната формула имаме

$$\frac{\text{НОК}(n+2, n+3, \dots, n+k+1)}{\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k)} = \frac{n+k+1}{n+1}. \qquad (2)$$

Степента на p в числителя на лявата страна е m, а в знаменателя – поне 1, докато степента на p в числителя на дясната страна е m, а в знаменателя – 0. Противоречие! Следователно, допускането е грешно и при $k \geq 3$ не съществува полином с исканото свойство.

Оценяване. (7 точки) 1т. за случая $k = 2$; 3т. за (1); 1т. за съществуването на C; 2т. за извеждане на (2) и избор на подходящо n.

Задача 10.4. Във всяка клетка на таблица 101×101 е записано естествено число. Известно е, че както и да изберем 101 клетки на таблицата, никои две от които не лежат в един ред или стълб, сумата на числата в избраните клетки се дели на 101. Да се докаже, че броят начини да изберем по една клетка от всеки ред на таблицата така, че сумата на числата в избраните клетки да се дели на 101, се дели на 101.

Решение. Нека $p = 101$ и да номерираме редовете и стълбовете на таблицата с числата от 1 до p. С $c_{r,s}$ ще означаваме числото, записано в ред r и стълб s на таблицата. Ще наричаме *ключалка* множество от p клетки, никои две от които не лежат в един ред или стълб. Нека $i \neq j, k \neq l \in \{1, 2, \dots, p\}$ - лесно се вижда, че можем да изберем $p - 2$ клетки, които допълват двойките клетки $(i, k), (j, l)$ и $(i, l), (j, k)$ до ключалки. Тогава от условието следва, че $c_{i,k} + c_{j,l} \equiv c_{i,l} + c_{j,k} \pmod p$.
Нека сега изберем цели числа $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ такива, че за всяко i да е изпълнено $c_{1,i} = a_1 + b_i$ и $c_{i,1} = a_i + b_1$. Тогава лесно се проверява, че за всеки r, s е изпълнено $c_{r,s} \equiv a_r + b_s \pmod p$.
Ще наричаме *обобщена ключалка* множество от p клетки, никои две от които не се намират в един и същ ред. Искаме да докажем, че броят на обобщените ключалки със сума, кратна на p, е кратен на p. Да разгледаме клетките $(1, k_1), (2, k_2), \dots, (p, k_p)$ и нека с d_j означим броя на тези клетки, които се намират в стълб j. Имаме:

$$\sum_{i=1}^{p} c_{i,k_i} \equiv \sum_{i=1}^{p} (a_i + b_{k_i}) \equiv \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=1}^{p} d_i b_i \pmod p.$$

Това показва, че остатъкът $\pmod p$ на сумата на числата в дадена обобщена ключалка зависи единствено от набора $(d_1, d_2, \dots, d_p)$. Да разгледаме набор, за който по-горната сума е кратна на p. Броят обобщени ключалки, които имат този набор, е

$$\frac{p!}{\prod_{i=1}^{p} d_i!}. \qquad (1)$$

Това число се дели на p, стига поне две от числата $d_1, d_2, \dots, d_p$ да са ненулеви (тъй като p е просто). Случаят, в който точно едно от тези числа е ненулево, съответства на обобщена ключалка, в която всички клетки са в един и същ стълб. Следователно броят обобщени ключалки, различни от стълб на таблицата, със сума, кратна на p, се дели на p. Остава да забележим, че за сумата на числата в i-тия стълб на таблицата имаме

$$\sum_{j=1}^{p} c_{j,i} \equiv \sum_{j=1}^{p} (a_j + b_i) \equiv \sum_{j=1}^{p} a_j \pmod p,$$

и тогава или всички стълбове имат сума, кратна на p, или нито един от стълбовете не е с такава сума. Исканото следва.

Забележка. Твърдението на задачата остава вярно за произволна таблица 101×101 (и съответно $p \times p$, където p е просто число).

Оценяване. (7 точки) 1т. за $c_{i,k} + c_{j,l} \equiv c_{i,l} + c_{j,k} \pmod p$; 1т. за $c_{r,s} \equiv a_r + b_s \pmod p$; 1т. за наблюдението, че сумата на числата в дадена обобщена ключалка зависи единствено от набора $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$; 2т. за (1); 2т. за довършване.

Задача 11.1. Четворка (a, b, c, d) от различни естествени числа се нарича k-*хубава*, ако са изпълнени следните две свойства:

- Измежду числата a, b, c, d няма три, които да образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия.
- Измежду числата $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$ и $c + d$ има k, които образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия.

а) Да се намери 4-хубава четворка.

б) Да се намери най-голямото k за което съществува k-хубава четворка.

Решение. а) Четворката $(7, 6, 4, 3)$ е хубава защото в нея няма три числа, които да образуват аритметична прогресия, а от шестте числа

$$7 + 6 = 13, 7 + 4 = 11, 7 + 3 = 10, 6 + 4 = 10, 6 + 3 = 9, 4 + 3 = 7$$

числата $7, 9, 11, 13$ образуват аритметична прогресия.
б) Без ограничение нека $a > b > c > d$. Тогава

$$a + b > a + c > \max(a + d, b + c) > \min(a + d, b + c) > b + d > c + d.$$

Да забележим, че ако:
1. $a + b$, $a + c$ и $a + d$ образуват аритметична прогресия, то $2(a + c) = (a + b) + (a + d) \iff 2c = b + d$;
2. $a + b$, $a + c$ и $b + c$ образуват аритметична прогресия, то $2(a + c) = (a + b) + (b + c) \iff 2b = a + c$;
3. $a + d$, $b + d$ и $c + d$ образуват аритметична прогресия, то $2(b + d) = (a + d) + (c + d) \iff 2b = a + c$.
4. $b + c$, $b + d$ и $c + d$ образуват аритметична прогресия, то $2(b + d) = (b + c) + (c + d) \iff 2c = b + d$.
И в четирите случая получаваме противоречие с условието на задачата.
От горното е ясно, че всичките 6 числа не могат да образуват аритметична прогресия.
Да допуснем, че 5 от тях образуват аритметична прогресия. Да забележим, че което и от числата $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ и $c+d$ да изтрием, винаги се среща някоя от прогресиите 1., 2., 3., или 4.,противоречие.
От а) следва, че търсеното k е 4.

Оценяване. (6 точки) а) за вярна 4-хубава четворка – 2 точки; б) за наредба на четирите числа и на получените шест сбора – 1 точка; за доказателство, че $k \leq 4$ – 3 точки; частични резултати: за наблюдението, че някой от примерите 1., 2., 3. и 4. води до противоречие – 1 точка; за доказателство, че шестте числа не могат да образуват аритметична прогресия (еквивалентно на $k \leq 5$) – 1 точка.

Задача 11.2. Върху страните AB, BC и AC на триъгълник ABC са избрани съответно точки C_1, A_1 и B_1 така че $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Правите A_1C_1 и A_1B_1 пресичат права през A, успоредна на BC, съответно в точки P и Q. Ако описаните окръжности около триъгълниците APC_1 и AQB_1 се пресичат за втори път в точка R върху отсечката AA_1, да се докаже, че точка R лежи на вписаната в триъгълник ABC окръжност.

Решение. От $PQ \parallel BC$ и $BA_1 = BC_1$ получаваме

$$\sphericalangle APC_1 = C_1A_1B = \sphericalangle A_1C_1B = \sphericalangle AC_1P$$

Тъй като четириъгълникът APC_1R е вписан, имаме

$$\sphericalangle A_1RC_1 = \sphericalangle APC_1 = \sphericalangle PC_1A = \sphericalangle PRA.$$

Аналогично

$$\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle AB_1Q = \sphericalangle AQB_1 = \sphericalangle A_1RB_1 = \sphericalangle ARQ.$$

От $\sphericalangle B_1RC_1 + \sphericalangle B_1A_1C_1 = 180^\circ$ следва, че $RC_1A_1B_1$ е вписан в окръжност k. Понеже $\sphericalangle C_1RA_1 = \sphericalangle C_1A_1B = \sphericalangle A_1C_1B$ и $\sphericalangle B_1RA_1 = \sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CB_1A_1$, то k се допира до страните на триъгълник ABC, т.е. k е вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Оценяване. (6 точки) За $\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle AB_1Q = \sphericalangle AQB_1 = \sphericalangle A_1RB_1 = \sphericalangle ARQ$ или съответното му – 2 точки; за $RC_1A_1B_1$ вписан – 2 точки; за извода, че k е вписаната окръжност – 2 точки.

Задача 11.3. За естествено число n са изпълнени следните сквойства:

- Числото $n+1$ се дели на 24.
- Сборът от квадратите на всички делители на n (включително 1 и самото n) се дели на 48.

Колко най-малко делители може да има n?

Решение. Тъй като $n+1$ се дели на 4, то n не е точен квадрат. Следователно делителите на n могат да бъдат разделени на двойки

$$(a_0, b_0) = (1, n); (a_1, b_1), \ldots, (a_s, b_s),$$

като броят на делителите на n е $2(s+1)$. Тъй като 24 дели $n+1$, то всички делители на n са нечетни и не се делят на 3. За всяко $i = 0, 1, \ldots, s$ имаме

$$a_i + b_i = a_i + \frac{n}{a_i} = \frac{a_i^2 - 1 + n + 1}{a_i}$$

и от a_i нечетно, което не се дели на 3 следва, че $a_i^2 - 1$ се дели на 24. Следователно $a_i + b_i$ се дели на 24.

Сега от условието имаме, че

$$\sum_{i=0}^{s}(a_i^2 + b_i^2) = \sum_{i=0}^{s}((a_i + b_i)^2 - 2a_ib_i) = \sum_{i=0}^{s}(a_i + b_i)^2 - 2n(s+1)$$

се дели на 48. Тъй като 48 дели $(a_i + b_i)^2$ и n е нечетно, то 48 дели $2(s+1)$. Това означава, че n има поне 48 делители.

Числото $n = 23^{47}$ има исканите свойства, защото 24 дели $23^{47} + 1$ и сборът от квадратите на делителите на n е

$$1 + 23^2 + 23^4 + \cdots + 23^{94}$$

се дели на 48, защото $23^{2k} = 529^k \equiv 1 \pmod{48}$.

Оценяване. (7 точки) За наблюдението, че всички делители на n са нечетни и не се делят на 3 – 1 точка; за наблюдението, че n не е точен квадрат и делителите му могат да се групират по двойки с произведение n – 1 точка; за доказателство, че сборът на числата във всяка двойка се дели на 24 – 2 точки; за доказателство, че n има поне 48 делители (т.е. 48 дели $2(s+1)$) – 1 точка; за намиране на число с 48 делители, което изпълнява условието – 2 точки.

Задача 11.4. Страната A има km града, а страната B има kn града ($k, m, n \in \mathbb{N}$.). Всеки град от A е свързан с двупосочна директна авиолиния с всеки град от B. Те се обслужват от k авиокомпании (всяка авиолиния се обслужва само от една компания). Други авиолинии, освен посочените, няма. Докажете, че може да изберем авиокомпания и $m + n$ града, така че да е възможно да се придвижим между всеки два от избраните градове, ползвайки само авиолиниите на тази компания.

Решение. **Лема 1.** Нека x, y са положителни реални числа, а $k, \ell, \ell \geq k$ са естествени числа. Реалните числа $x_i, y_i, i = 1, 2, \ldots, \ell$ удовлетворяват условията

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0, x_i + y_i \leq (x+y)/k, i = 1, 2, \ldots, \ell;$$
$$\sum_{i=1}^{\ell} x_i = x\,, \sum_{i=1}^{\ell} y_i = y. \qquad (1)$$

Тогава е в сила неравенството

$$\sum_{i=1}^{\ell} x_iy_i \leq \frac{xy}{k}.$$

Равенството се достига само когато $x_i = x/k, y_i = y/k, i = 1, 2, \ldots, k; x_i = y_i = 0, i > k$.

Доказателство. Да означим $f(x, y) := \sum_{i=1}^{\ell} x_iy_i$, където $x = (x_1, \ldots, x_\ell), y = (y_1, \ldots, y_\ell)$. Тъй като условията (1) определят компактно множество, функцията f достига максималната си стойност върху него, да речем в точките x_i', y_i'. Можем да считаме, че $x_1' \geq x_2' \geq \cdots \geq$

x'_ℓ. Ще докажем, че y'_i са също в намаляваща последователност. Ако допуснем, че $y'_i < y'_{i+1}$, да разгледаме $x_i = x_{i+1} := (x'_i + x'_{i+1})/2; y_i = y_{i+1} := (y'_i + y'_{i+1})/2$. Тогава, (неравенство на Чебишев)

$$x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1} > x'_i y'_i + x'_{i+1} y'_{i+1}$$

което противоречи на максималността на x', y'. По нататък, ако $x'_1 + y'_1 < (x+y)/k$ ние по аналогичен начин може да образуваме $x_1 := x'_1 + \varepsilon, x_2 := x'_2 - \varepsilon; y_1 := y'_1 + \delta, x_2 := x'_2 - \delta$ за подходящи $\varepsilon, \delta \geq 0$ и да получим по-голяма стойност на f. Така че, $x'_1 + y'_1 = (x+y)/k$.
Нека k' е най-голямото естествено число, за което $x_{k'} > 0$ и $y_{k'} > 0$. По същия начин, както по-горе, се вижда че $x'_i + y'_i = (x+y)/k, i = 1, 2, \ldots, k'$. Значи $k' \leq k$. Нека допуснем, че $k' < k$ и за определеност $y_i = 0, i > k'$. Да модифицираме x, y по следния начин. Полагаме $x_i := x'_i, y_i := y'_i, i = 1, 2, \ldots, k'-1; x_{k'} := x'_{k'}, y_{k'} := y'_{k'} - \varepsilon, x_{k'+1} := (x+y)/k, y_{k'+1} := \varepsilon$. За $i > k'+1$ числата y_i са нули, а числата x_i нямат значение, стига да се подчиняват на (1). Тъй като $x'_k < (x+y)/k$, лесно се вижда че $f(x,y) > f(x', y')$ което противоречи на максималността на x', y'.
И така, $k' = k$. Сега ще докажем, че $x'_i = x/k, y'_i = y/k, i = 1, 2, \ldots, k$. Да допуснем че това не е вярно и j е първият индекс, за който $x'_j \neq x/k$, като нека за определеност нека $x'_j < x/k$. Тогава, ще съществува $i > j$ за което $x'_i > x/k$, което значи $x'_i > x'_j$ и значи последователността $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ не е намаляваща, противоречие.
С това установихме, че $x'_i = x/k, y'_i = y/k, i = 1, 2, \ldots, k$. Тъй като $f(x', y') = kxy$, верността на Лема 1 е доказана.
Обратно към задачата. Броят всички авиолинии е k^2mn. Значи има авиокомпания, която обслужва поне kmn авиолинии. Да премахнем всички останали авиолинии. Ще докажем, че в получения граф, нека бъде K', има свързана компонента състояща се от поне $m+n$ върха. Да допуснем противното. Нека свързаните компоненти на K' са $G(A_i, B_i), i = 1, 2, \ldots, \ell$ и $|A_i| = m_i, |B_i| = n_i, i = 1, 2, \ldots, \ell$. Имаме

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i = km, \sum_{i=1}^{\ell} n_i = kn, m_i + n_i < m + n$$

Съгласно Лема 1,

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i n_i < kmn$$

което противоречи на избора на авиолинията. И така, за поне едно i е изпълнено $m_i + n_i \geq m + n$.

Оценяване. (7 точки) 2т. за стигане до неравенство от типа на Лема 1, 5т. за доказването му.

Задача 12.1. Редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена чрез равенствата:

$$x_0 = 1,$$
$$x_{n+1} = \sin x_n + \frac{\pi}{2} - 1 \text{ за } n \geq 0.$$

Да се докаже, че редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е сходяща и да се определи границата ѝ.

Решение. Първо ще докажем, че редицата е строго растяща. Да отбележим, че за всяко n имаме $x_n \leq \frac{\pi}{2}$, т.к $\sin x \leq 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Освен това имаме, че функцията $f(x) = \sin x - x$ е намаляваща за $x \in \mathbb{R}$, т.к $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.
Следователно за $x \in (-\infty, \frac{\pi}{2})$ имаме $f(x) \geq \sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$. Така получаваме, че $\sin x_n \geq x_n + 1 - \frac{\pi}{2}$, което е еквивалентно на $x_{n+1} \geq x_n$. Следователно редицата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е растяща и т.к тя е ограничена следва, че е сходяща. Ако l е нейната граница, то за l е изпълнено, че $l = \sin l + \frac{\pi}{2} - 1$, т.е $f(l) = f(\frac{\pi}{2})$. Функцията f е намаляваща, което означава, че $l = \frac{\pi}{2}$.

Оценяване. (6 точки) 1т. за доказателство, че $x_n \leq \pi/2$ за всяко n, 3т. за доказателство, че x_n е растяща и 2т. за довършване.

Задача 12.2. Даден е остроъгълен и разностранен триъгълник ABC. Вписаната в триъгълник ABC окръжност с център I допира страните BC, AC и AB съответно в точките D,E и F. Окръжността с център C и радиус CE пресича за втори път правата EF в точка K. Ако X е допирната точка с AB на външновписаната окръжност срещу върха C за триъгълник ABC, то да се докаже, че правите XC, KD и IF се пресичат в една точка.

Решение. Първо ще докажем, че CX и IF се пресичат върху вписаната окръжност. Нека CX пресича вписаната окръжност в точка P. Тогава, ако разгледаме хомотетия h с център C, която изпраща вписаната окръжност във външновписаната окръжност срещу върха C, то $h(P) = X$ и следователно ако t е допирателната през P към вписаната окръжност, то имаме $h(t) = AB$. Последното означава, че $t || AB$ и т.к $IP \perp t$ и $IF \perp AB$, то получаваме, че $P \in IF$.
От друга страна, ако KD пресича вписаната окръжност за втори път в точка Q, то имаме $\sphericalangle EQD = 180^\circ - \sphericalangle EFD = 90^\circ + \frac{\sphericalangle ACB}{2}$. Имаме, че $\sphericalangle EKD = \frac{\sphericalangle ACB}{2}$, откъдето следва, че $\sphericalangle QEF = 90^\circ$, т.е $Q \equiv P$. Така получаваме, че правите KD, CX и IF се пресичат в точка P.

Оценяване. (6 точки) 3т. за $CX \cap IF$ лежи на вписаната окръжност и 3т. за $P \in KD$.

Задача 12.3. Да се реши в естествени числа уравнението:

$$\sqrt[n]{m} + \sqrt[m]{n} = 2 + \frac{2}{mn(m+n)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}.$$

Решение. Уравнението няма решение в естествени числа. Ще докажем, че за всички двойки естествени числа (m, n), за които имаме $\{\sqrt[n]{m}\} > 0$, то е в сила неравенството $\{\sqrt[n]{m}\} \geq \frac{1}{mn}$. Нека $a = \lfloor \sqrt[n]{m} \rfloor$ и $x = \{\sqrt[n]{m}\}$. Тогава имаме, че

$$m - a^n = x \sum_{i=0}^{n-1} m^{\frac{i}{n}} a^{n-1-i}$$

и следователно

$$x \geq \frac{1}{nm^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{1}{nm}.$$

Така получаваме, че $\sqrt[n]{m} + \sqrt[m]{n} \geq 2 + \frac{2}{mn}$, откъдето задачата следва.
Оценяване. (7 точки) 2т. за формулиране на вярно неравенство за дробната част на $\sqrt[n]{m}$, 4т. за доказателството му и 1т. за довършване.

Задача 12.4. Ще наричаме едно множество S от точки в равнината *есенно*, ако разстоянието между всеки две точки от S е най-много 1. С $f(n,d)$ означаваме най-голямото цяло число, такова че за всяко *есенно* множество S от $3n$ точки в равнината, съществува кръг с диаметър d, който съдържа поне $f(n,d)$ точки от S.
Да се докаже, че съществува $\varepsilon > 0$ (независещо от n), за което за всички $d \in (1-\varepsilon, 1)$ стойността на $f(n,d)$ не зависи от d и да се определи тази стойност като функция на n.

Решение. Първо ще докажем, че съществува $d < 1$, за което винаги можем да намерим окръжност с диаметър d която съдържа n точки от дадените. Нека M е множество от $3n$ точки с диаметър 1 и нека за всяка точка $A \in M$ разгледаме кръг D_A с център A и радиус $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Лема. Ако $A, B, C \in M$, то $D_A \cap D_B \cap D_C \neq \emptyset$.

Доказателство. Ако точките A, B, C образуват остроъгълен триъгълник, то някой от ъглите на триъгълника е с мярка между 60° и 90°. Нека БОО това е $\sphericalangle ACB$. Тогава за радиуса R на описаната около ABC окръжност, получаваме от синусова теорема, че $2R = \frac{AB}{\sin \sphericalangle ACB} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, откъдето следва, че $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ и следователно центърът на описаната окръжност $O \in D_A \cap D_B \cap D_C$.
Ако точките A, B, C образуват тъпоъгълен или правоъгълен триъгълник, то нека БОО $\sphericalangle ACB \geq 90^\circ$. Нека M е средата на AB. Ясно е, че $MA \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ и аналогично $MB < \frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е $M \in D_A \cap D_B$. От друга страна

$$MC^2 = \frac{2AC^2 + 2CB^2 - AB^2}{4} \leq \frac{AB^2}{4} \leq \frac{1}{4},$$

където първото неравенство следва от това, че $\sphericalangle ACB \geq 90^\circ$. Следователно $MC \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ и следователно $M \in D_C$, т.е наистина $M \in D_A \cap D_B \cap D_C$, с което лемата е доказана.
От теорема на Хели, приложена за множеството от кръгове $\{D_A : A \in M\}$, следва, че т.к всеки три от тях се пресичат, то $\bigcap_{A \in M} D_A \neq \emptyset$. Нека $P \in \bigcap_{A \in M} D_A$. Тогава кръгът D_P с център P и радиус $\frac{1}{\sqrt{3}}$ съдържа M.
Сега ще покажем, че всеки кръг K с радиус $\frac{1}{\sqrt{3}}$ може да бъде покрит от 3 кръга с радиус $\frac{1}{2}$. Нека точките $A', B', C' \in D_P$ са такива, че $A'B'C'$ е равностранен триъгълник. Тогава $A'B' = B'C' = C'A' = 1$ и кръговете с диаметри $A'B', A'C', B'C'$ покриват D_P.
Аналогично кръгове k_1, k_2, k_3 с центрове средите на $A'B', A'C', B'C'$ и диаметър d "почти"покриват K. Наистина множеството $K \setminus (k_1 \cup k_2 \cup k_3)$ се състои от 3 еднакви фигури, които ще наричаме антилуни поради визуалната прилика. Да отбележим също, че можем да построим антилуни за всеки $, B, C$, лежащи на контура на K и образуващи равностранен триъгълик.

Нека сега да допуснем противното, а именно, че за всяко $d < 1$ можем да изберем множество от $3n$ точки , така че никои n от тях да не лежат в кръг с диаметър d. Да забележим, че ако в трите антилуни съответсващи на някои $, B, C$ няма точки от , то поне един от k_1, k_2, k_3 съдържа n точки. Оттук можем да заключим, че във всяка тройка съответни антилуни има точка от M.
Нека да фиксираме N нечетно и да вземем $3N$ антилуни $A_1, \ldots, A_{3N}$ през равни ъгли. Нека също така сме избрали $d < 1$, така че $\mathrm{dist}(A_1, A_{N+2}) > 1$. Това е възможно, защото когато d клони към 1, диаметърът на антилуните сходи към 0. Тъй като разстоянието между две точки, образуващи ъгъл $2\pi(N+1)/3N$, е повече от 1, то от неравенството на триъгълника следва, че съществува $d < 1$, за което $\mathrm{dist}(A_1, A_{N+2}) > 1$.
От предходните ни разсъждения следва, че за всяко i поне една от антилуните A_i, A_{N+i}, A_{2N+i} съдържа точка от M. Нека БОО A_1 съдържа точка от . Следователно, антилуни те $A_{N+2}, \ldots, A_{2N}$ не съдържат точки от . Нека A_m е първата антилуна след A_{2N}, която съдържа точка. Следователно антилуните $A_{m-(2N-1)}, \ldots, A_{m-1}$ не съдържат точки от M. От това следва, че антилуни $A_m, \ldots, A_{m-(2N+1)}$ съдържат точки. (Антилуната A_{m-2N} е единствената, за която не знаем със сигурност дали съдържа точка). Нека B_i е точката от M в антилуна A_{m-1+i} и нека C_i е центърът на дъгата на A_{m-1+i}
Сега можем да изберем N достатъчно голямо и $d = d'$ достатъчно близко до 1 така, че:

$$\mathrm{dist}(C_1, B_1) \leq \mathrm{diam}(A_m) < 0.01$$
$$\mathrm{dist}((C_1 + C_{N+1})/2, B_{\lfloor (N+1)/2) \rfloor}) \leq \mathrm{diam}(A_m) + 2\pi/3N < 0.01$$
$$\mathrm{dist}(C_{N+1}, B_N) \leq \mathrm{diam}(A_m) + 2\pi/3N < 0,01$$

Следователно, множеството M лежи изцяло в сечението P на и трите кръга k_1, k_2, k_3 с центрове $C_1, C_{(N+1)/2}, C_N$ и диаметър 1.01. Но сега лесно се забелязва, че P може да се впише в окръжност K' с радиус $d"/\sqrt{3} < 1/\sqrt{3}$. Но тогава $'$ се покрива (съответно и) от 3 кръга с диаметър $d"$. Следователно, за $d = \max(d', d")$ със сигурност съществува кръг покриващ поне n точки от M.
Остана да покажем, че за всяко $d < 1$ и всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува множество M от $3n$ точки, никои $n+1$ от които не принадлежат на един кръг с диаметър d. Построяваме n еднакво ориентирани равнострани триъгълника със страна $(1+d)/2$, така че разстоянието между всеки 2 съответни върха е по-малко от $(1-d)/10$. Лесно се проверя, че тази конструкция изпълнява необходимите условия.

Оценяване. (7 точки) 2т. за доказателство, че S се покрива от 3 кръга с диаметър 1, 4т. за показване, че S се покрива от 3 кръга с диаметър $d' < 1$, 1т. за конструкция на множество от $3n$ точки, от което не може да бъдат покрити $n+1$ точки с кръг с диаметър d за фиксирано $d < 1$.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.3 – Мирослав Маринов; 9.1, 10.1 – Недялка Димитрова; 9.2, 10.2, 10.3 – Александър Иванов; 9.3 – Любен Личев; 9.4 – Михаил Школников; 10.4 – Борислав Кирилов; 11.1, 11.2 – Емил Колев; 11.3 – Аделина

Чопанова; 11.4 – Драгомир Грозев; 12.1, 12.2, 12.3 – Кристиян Василев; 12.4 – Кристиян Василев и Константин Гаров.