**Съюз на математиците в България**
**Американска фондация за България**
**Фондация Георги Чиликов**

# Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

**София, 15-17 ноември 2024 г.**

**София, 2024 г.**

**Условия, кратки решения и критерии за оценяване**

**Задача 10.1.** Да се намерят всички двойки реални числа $(x;y)$, които са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=88 \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=40 \end{array} \right. .$$

*Отговор.* 4 решения: $(x;y)=(\sqrt{7}\pm 1,\sqrt{7}\mp 1)$; $(x;y)=(-\sqrt{7}\pm 1,-\sqrt{7}\mp 1)$.

*Решение. Първи метод.* Тъй като $x^2+y^2\geq 0$, то в дефиниционната област на квадратния корен попадат всички реални $(x;y)$. Събирайки двете уравнения и разделяйки всяка от двете страни на две, получаваме

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=64=4^3 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x^2+y^2}=4 \text{ и } x^2+y^2=16.$$

Изваждайки от първото уравнение второто и разделяйки всяка от двете страни на две, получаваме

$$xy\sqrt{x^2+y^2}=24 \qquad \Longrightarrow \qquad xy=24/4=6 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2y^2=36.$$

Според формулите на Виет $x^2$ и $y^2$ са корените на уравнението

$$t^2-16t+36=0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_{1,2}=8\pm 2\sqrt{7}=\left(\sqrt{7}\pm 1\right)^2.$$

Оттук $x,y\in\{\sqrt{7}\pm 1,-\sqrt{7}\pm 1\}$. От съображения за симетрия виждаме, че ако $(x;y)$ е решение, то решения са и $(y;x)$, $(-x;-y)$ и $(-y;-x)$. Тъй като $xy=6>0$, то $x$ и $y$ са с еднакви знаци. Следователно всяка една от четирите възможности за $x\in\{\sqrt{7}\pm 1,-\sqrt{7}\pm 1\}$ еднозначно определя съответното $y$ и така получаваме четирите решения на задачата $(x;y)=(\sqrt{7}\pm 1,\sqrt{7}\mp 1)$; $(x;y)=(-\sqrt{7}\pm 1,-\sqrt{7}\mp 1)$.

*Втори метод.* От $x^2+y^2=16$ и $xy=6$ получаваме $(x+y)^2=16+2\cdot 6=28$, откъдето $|x+y|=2\sqrt{7}$. Ако $x+y=2\sqrt{7}$, то $x$ и $y$ са корени на квадратното уравнение

$$t^2-2\sqrt{7}+6=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t_{1,2}=\sqrt{7}\pm 1,$$

и поради симетрията на $x$ и $y$ в този случай уравнението има 2 решения: $(x;y)=(\sqrt{7}\pm 1;\sqrt{7}\mp 1)$.

Ако пък $x+y=-2\sqrt{7}$, то $x$ и $y$ са корени на квадратното уравнение

$$t^2+2\sqrt{7}+6=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t_{1,2}=-\sqrt{7}\pm 1,$$

и поради симетрията на $x$ и $y$ в този случай уравнението има 2 решения: $(x;y)=(-\sqrt{7}\pm 1;-\sqrt{7}\mp 1)$.

**Оценяване.** (6 точки) *Първи метод:* По 1 т. за $x^2+y^2=16$ и $xy=6$; 2 т. за $x,y\in\{\sqrt{7}\pm 1,-\sqrt{7}\pm 1\}$; 2 т. за намирането на четирите решения. *Втори метод:* по 1 т. за $|x+y|=2\sqrt{7}$ и $xy=6$; по 2 т. за всеки от случаите $x+y=\pm 2\sqrt{7}$, минус 1 т., ако е изпусната симетрията $(x;y)\to(y;x)$. *И при двата подхода,* ако преобразуванията не са еквивалентни, а само следствени (т.е., $\Longleftrightarrow$ е заменено с $\Longrightarrow$), то се отнема 1 т. при липса на проверка.

**Задача 10.2.** Даден е неравнобедрен остроъгълен триъгълник $ABC$, в който $AL$ ($L\in BC$) е ъглополовящата на $\angle BAC$ и $M$ е средата на $BC$. Нека ъглополовящите на $\angle AMB$ и $\angle CMA$ пресичат $AB$ и $AC$ съответно в точките $P$ и $Q$. Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника $APQ$ се допира до $BC$ тогава и само тогава, когато минава през $L$.

*Решение.* От свойството на ъглополовящата и факта, че $BM=MC$, получаваме

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{MC}=\frac{AQ}{QC}$$

и от теоремата на Талес $PQ\parallel BC$. Следователно $\angle BLP=\angle LPQ=\varphi$. Нека $\omega$ е описаната окръжност около триъгълника $APQ$.

Нека $\omega$ се допира до $BC$ в точка $L'$. Тогава

$$\measuredangle L'QP = BL'P = \measuredangle L'PQ,$$

т.е. $L'$ е средата на дъгата $\widehat{PQ}$ от $\omega$. Следователно $AL'$ е ъглополовящата на $\measuredangle PAQ$, т.е. $L' \equiv L$.

Нека $L \in \omega$. Тогава понеже $AL$ е ъглополовяща на $\measuredangle PAQ$, то $PL = LQ$, откъдето

$$\measuredangle PQL = \measuredangle LPQ = \measuredangle BLP = \varphi.$$

Последното означава, че $\omega$ се допира до $BC$.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за $PQ \parallel BC$, по 2 т. за всяка от двете посоки.

**Задача 10.3.** Да се намерят всички полиноми $P$ с цели коефициенти, за които съществува естествено число $N$, такова че за всяко $n \geq N$, всеки прост делител на $n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ е делител и на $P(n)$. (Тук $\lfloor x \rfloor$ означава най-голямото цяло число, по-малко или равно на реалното число $x$.)

*Отговор.* $P \equiv 0$.

*Решение.* Очевидно $P \equiv 0$ върши работа. Ще покажем, че други $P$ няма. Да забележим, че $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$ за всеки две естествени $n$ и $k$, за които $n \in [k^2, k^2+2k]$. Да фиксираме естествено число $m \geq N$ и просто число $p$. Да положим в горното $k = p - 1 + m$ и да разгледаме интервала $[k^2, k^2+2k]$. Той има дължина $2k > p$, следователно в него съществува естествено число $n \equiv -2^m \pmod p$. Тогава от теоремата на Ферма получаваме

$$n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = n + 2^k \equiv -2^m + 2^{p-1+m} \equiv 0 \pmod p$$

Следователно $p \mid P(n)$. Понеже $P$ е полином с цели коефициенти,

$$P(-2^m) \equiv P(n) \equiv 0 \pmod p$$

Така $p \mid P(-2^m)$ за всяко просто число $p$. Следователно $P(-2^m) = 0$ за всяко естествено число $m \geq N$. Това значи, че $P \equiv 0$, с което решението е завършено.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за ясната идея за разглеждане на числа $n$ в интервали от вида $[k^2, k^2 + 2k]$, 4 т. за конструиране на двойки $(n; p)$ от посочения вид и доказване на делимостта, 2 т. за довършване.

**Задача 10.4.** Дадени са пълен ориентиран граф $G$ с 2024 върха и естествено число $k \leq 10^5$. Ангел и Борис играят следаната игра: Ангел оцветява $k$ от ребрата на $G$ в червено и поставя пул в един от върховете на $G$. След това двамата правят ходове, редувайки се; Ангел започва. На всеки свой ход той премества пула в съседен връх, след което Борис променя ориентацията на някое от ребрата, което не е червено. Ако в някакъв момент Ангел не може да премести пула, то той губи и победител е Борис. Да се определи в зависимост от $G$ и $k$ дали Борис има печеливша стратегия.

*Отговор.* Борис има печеливша стратегия при $k \leq 2$ и всякакъв граф $G$, както и при $k \geq 3$, когато в $G$ няма цикли.

*Решение.* Ще започнем решението със следните две леми.

*Лема 1.* Нека $G$ е ориентиран граф с $n$ върха, в който няма цикли. Тогава можем да номерираме върховете му с естествените числа от 1 до $n$ така, че ако за някои два върха $x$ и $y$ с номера $i$ и $j$ съответно има ребро $x \to y$, то непременно $i < j$.

*Решение.* Ще използваме индукция по $n$. При $n = 2$ твърдението е тривиално. Нека сега исканото е в сила за всеки граф с по-малко от $n$ върха. Ако допуснем, че от всеки връх в $G$ излиза поне по едно ребро, то бихме получили цикъл, което е противоречие. Значи съществува връх $v$, от който не излизат ребра. Номерираме него с $n$, а останалите върхове номерираме съгласно индуктивната хипотеза за графа $G_1 := G \setminus \{v\}$ (понеже в $G$ няма цикли, то и в $G_1$ няма). Това гарантира, че условието за ребрата в $G_1$ се изпълнява. Останалите ребра са от вида $u \to v$, но номерът на $v$ е най-големият възможен ($n$), значи и за тях исканото е в сила. С това лемата е доказана.

*Лема 2.* Нека $G$ е пълен ориентиран граф с $n$ върха, в който има поне един цикъл. Тогава в $G$ има цикъл с дължина 3.

*Решение.* Да допуснем противното и да разгледаме цикъл $v_1v_2\dots v_kv_1$ с минимална дължина $k \geq 4$. Ако има ребро $v_3 \to v_1$, то $v_1v_2v_3v_1$ е цикъл с дължина $3 < k$, което е противоречие. Значи имаме реборото $v_1 \to v_3$; сега обаче $v_1v_3\dots v_kv_1$ е цикъл с дължина $k-1 < k$, което отново е противоречие. Следователно в $G$ има цикъл с дължина 3, с което лемата е доказана.

Сега да пристъпим към решението. Ако $k \geq 3$ и в $G$ има цикъл, то съгласно Лема 2 в $G$ има цикъл $C$ с дължина 3. Значи Ангел може да оцвети $C$ и още произволни $k-3$ ребра в червено и да постави пула в един от върховете на $C$. Понеже Борис не може да промени ориентацията на ребрата на този цикъл, то Ангел може да направи неограничен брой ходове, което го прави победител.

Нека сега е вярно, че в $G$ или няма цикъл, или $k \leq 2$. Ще докажем, че и в двата случая Борис може след краен брой промени (възможно нула) да приведе $G$ в граф, който може да бъде номериран със свойството в Лема 1. В първия случай това следва директно от лемата, остава да го проверим за $k \leq 2$. Да разгледаме червените ребра, които Ангел оцветява. Понеже те двете не образуват цикъл, то можем да номерираме участващите в тях върхове по желания начин. Останалите върхове в $G$ номерираме по произволен начин и докато има ребра от вида $i \to j$, където $i > j$, Борис променя тяхната ориентация. Така получихме пълен ориентиран граф $H$ с върхове числата от 1 до 2024 и ребра $i \to j$ за всеки $1 \leq i < j \leq 2024$. Нека след преместването от страна на Ангел пулът се намира във връх $n$. Разделяме върховете на $H$ на 2 групи по следния начин:

$$A = \{1, 2, \dots, 1000\};\ B = \{1001, 1002, \dots, 2024\}.$$

Да забележим, че ако ребрата, излизащи от върха, в който се намира пулът (в случая се намира в $n$) преди хода на Ангел, са само към такива с по-голям номер, то непременно върхът, в който пулът бива преместен, има по-голям номер. Остава да покажем, че Борис може да поддържа това свойство в сила.

Ребрата между двойка върхове от една и съща група са повече от $10^5$ и за двете групи, следователно и в двете групи има поне по едно ребро, което не е червено – нека това са $a = a_1 \to a_2$ (респективно от върхове в $A$) и $b = b_1 \to b_2$ (респективно от върхове в $B$). Действаме по следния начин:

- ако пулът е във връх от $A$, променяме $b$;
- ако пулът е във връх от $B \setminus \{b_2\}$, променяме $a$;
- ако пулът е във $b_2$ и имаме реброто $b_1 \to b_2$, променяме $a$;
- ако пулът е във $b_2$ и имаме реброто $b_2 \to b_1$, променяме $b$.

Лесно се съобразява, че исканото се изпълнява при тази стратегия.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за пълно описание на случая, в който Ангел печели, 3 т. за пълно описание на случая, в който Борис печели, 1 т. за завършване. При формулиране на стратегията на Ангел според дължината на минималния цикъл на $G$ и отсъствие на Лема 2 се отнемат 2 т.