Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

Задача 11.1. Да се намерят всички реални числа a, за които уравнението

$$x^3 - (a+2)x^2 - (a-2)x + 2a - 1 = 0$$

има три различни корена x_1, x_2 и x_3, и тези корени заедно с числото a в някакъв ред образуват аритметична прогресия.

Задача 11.2. Ъглите при върховете A, B и C на триъгълник ABC са съответно първи, втори и трети член на намаляваща аритметична прогресия. Намерете ъглите на триъгълника, ако $\measuredangle BHI = 60^\circ$, където H и I са съответно ортоцентърът и центърът на вписаната окръжност на триъгълника.

Задача 11.3. Кристи иска да раздаде бонбони на $n \geq 3$ свои съученици. Той разполага всеки от тях върху точка в двора на училището. Точките са в една равнина, като никои три от тях не лежат на една права. За всеки изпъкнал многоъгълник P с върхове сред тези точки, Кристи прави следното. Преброява учениците, които се намират вътре в P или на страните му, нека техният брой е S_P. Той раздава по S_P бонбона на всеки от тези S_P ученици. Ученик, получил най-малко бонбони след всички раздавания, наричаме *нещастен* (нещастните ученици могат да са един или повече). Определете максималното количество бонбони, които може да получи нещастен ученик.

Задача 11.4. Да се намери най-малкото естествено число n, за което съществуват n две по две различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такива че стойността на израза

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 2025}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

е естествено (т.е. цяло положително) число.