Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 11.1. Да се намерят всички реални числа a, за които уравнението

$$x^3-(a+2)x^2-(a-2)x+2a-1=0$$

има три различни корена x_1, x_2 и x_3, и тези корени заедно с числото a в някакъв ред образуват аритметична прогресия.

Решение. Тъй като

$$x^3-(a+2)x^2-(a-2)x+2a-1=(x-1)(x^2-(a+1)x-2a+1),$$

то $x_1=1$, а x_2 и x_3 са корени на $f(x)=x^2-(a+1)x-2a+1=0$. Тъй като $x_2+x_3=a+1$, то за дадената аритметична прогресия, с точност до симетрия, има две възможности – $x_2, 1, a, x_3$ или $1, x_2, x_3, a$.
В първия случай $x_2=2-a$ и след заместване в уравнението получаваме

$$f(2-a)=0 \iff 2a^2-7a+3=0$$

с корени $a=3$ и $a=\dfrac{1}{2}$.
Във втория случай $d=x_2-1$, като $x_2=\dfrac{a+2}{3}$ и получаваме

$$f\left(\frac{a+2}{3}\right)=0 \iff 2a^2+23a-7=0,$$

с корени $a=\dfrac{-23+\sqrt{585}}{4}$ и $a=\dfrac{-23-\sqrt{585}}{4}$.
Оценяване. (6 точки) 1 т. за разлагането $(x-1)(x^2-(a+1)x-2a+1)$; 1 т. за наблюдението, че $x_2+x_3=a+1$ води до разглеждането на само два случая; по 2 т. за пълно решаване на всеки от двата случая.

Задача 11.2. Ъглите при върховете A, B и C на триъгълник ABC са съответно първи, втори и трети член на намаляваща аритметична прогресия. Намерете ъглите на триъгълника, ако $\angle BHI=60^\circ$, където H и I са съответно ортоцентърът и центърът на вписаната окръжност на триъгълника.

Отговор. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$.

Решение. Първи метод. От условието следва, че $\angle B=60^\circ$. Тогава $\angle AIC=120^\circ$ и ако P е симетричната на I спрямо AC, то $\angle APC=120^\circ$. Това означава, че P е върху описаната около ABC окръжност. Тъй като симетричната на H спрямо AC също лежи на описаната окръжност (означаваме тази точка с Q), то $QHIP$ е равнобедрен трапец. Следователно $\angle PQH=\angle IHQ=120^\circ$.
Четириъгълникът $QBCP$ е вписан в окръжност, откъдето получаваме $\angle PCB=180^\circ-\angle BQP=60^\circ$. Понеже $\angle BCI=\angle ICA=\angle ACP$, получаваме $\angle ACB=40^\circ$ и $\angle BAC=80^\circ$.

Втори метод. (Б. Димитров) Ще използваме стандартно означение за ъглите на триъгълника ABC. Тогава от даденото условие получаваме $2\beta=\alpha+\gamma \implies 3\beta=180^\circ \implies \beta=60^\circ$. Ще решим задачата за остроъгълен триъгълник (когато $\triangle ABC$ е тъпоъгълен, разсъжденията са аналогични). Имаме $\angle AHC=\angle AIC=120^\circ$, откъдето четириъгълникът $AHIC$ е вписан. Сега

$$180-\alpha=\angle BHC=\angle BHI+\angle IHC=60^\circ+\angle IAC=60^\circ+\frac{\alpha}{2} \implies \alpha=80^\circ$$

От последното получаваме $\gamma=40^\circ$

Оценяване. (6 точки) *Първи метод:* 1 т. за $\beta=60^\circ$; 1 т. за доказване, че симетричната на I лежи на описаната окръжност; 2 т. за вписания четириъгълник $QBCP$; 2 т. за намиране на ъглите. *Втори метод:* 1 т. за $\beta=60^\circ$; 2 т. за вписания четириъгълник $AHIC$; 3 т. за намиране на ъглите.

Задача 11.3. Кристи иска да раздаде бонбони на $n \geq 3$ свои съученици. Той разполага всеки от тях върху точка в двора на училището. Точките са в една равнина, като никои три от тях не лежат на една права. За всеки изпъкнал многоъгълник P с върхове сред тези точки, Кристи прави следното. Преброява учениците, които се намират вътре в P или на страните му, нека техният брой е S_P. Той раздава по S_P бонбона на всеки от тези S_P ученици. Ученик, получил най-малко бонбони след всички раздавания, наричаме *нещастен* (нещастните ученици могат да са един или повече). Определете максималното количество бонбони, които може да получи нещастен ученик.

Решение. Нека X е множеството от n точки. За изпъкнал многоъгълник P с върхове в X да означим с $C(P)$ множеството от точки в X, които са вътре или на контура на P. Нека Q е общият брой бонбони, получени от всички ученици, а m е броят бонбони, получени от нещастен ученик. Имаме

$$Q = \sum_P |C(P)|^2 \leq \sum_{A \subset X} |A|^2 = \sum_{k=3}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Първото неравенство е в сила, защото $P \to C(P)$ е инекция от множеството на изпъкналите многоъгълници с върхове в X към множеството от всички подмножества на X. Използвайки

$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$ и $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$, пресмятаме:

$$\begin{aligned}
Q = \sum_{k=3}^{n} k^2 \binom{n}{k} &= n \sum_{k=3}^{n} k \binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{k=3}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n \sum_{k=3}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= n(n-1) \sum_{k=3}^{n} \binom{n-2}{k-2} + n \sum_{k=3}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= n(n-1)(2^{n-2}-1) + n(2^{n-1} - (n-1) - 1) \\
&= n(n+1)2^{n-2} - 2n(n-1) - n \qquad (1).
\end{aligned}$$

От (1) следва

$$m \leq (n+1)2^{n-2} - 2n + 1$$

Да разположим сега учениците във върховете на правилен n-ъгълник. Тогава за всяко $A \subset X$, изпъкналата обвивка на A се състои от всички върхове на A. Значи в (1) равенството се достига и $Q = n(n+1)2^{n-2} - n - 2n(n-1)$. От друга страна поради симетрията всеки ученик получава равен брой бонбони и значи $m = Q/n = (n+1)2^{n-2} - 2n + 1$.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за доказване оценката отгоре, 2 т. – че тя се достига (примера). При валидна оценка отгоре, но липса на аргументация, че $P \to C(P)$ е инекция (или еквивалентно разсъждение) се отнема 1 т. Ако формулата за m не е в затворен вид, (т.е. пресмятанията в (1) не са направени) се отнема 1 т.

Задача 11.4. Да се намери най-малкото естествено число n, за което съществуват n две по две различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такива че стойността на израза

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 2025}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

е естествено (т.е. цяло положително) число.

Отговор. $n = 9$.

Решение. Нека означим

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \,;\, Q = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Тъй като a_i и a_i^2 са от еднаква четност, то S и Q също са от еднаква четност. Щом Q дели $S^2 - 2025$, то S и Q са нечетни. Но тогава $S^2 - 2025 = (S-45)(S+45)$ се дели на 8 и понеже Q е нечетно, получаваме

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 2025}{\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)} \geq 8.$$

От друга страна от неравенството между средно аритметично и средно квадратично имаме:

$$nQ \geq S^2 > S^2 - 2025 \geq 8Q,$$

следователно $n > 8$, значи $n \geq 9$. Ще докажем, че за $n = 9$ е възможно да удовлетворим условията. Искаме да намерим решение на уравнението $S^2 - 2025 = 8Q$, тъй като знаем, че ако изразът има стойност, различна от 8, то $n > 16$. Целейки симетрия, нека положим $(a_1, a_2, a_3) = (x-1, x, x+1)$, $(a_4, a_5, a_6) = (y-1, y, y+1)$ и $(a_7, a_8, a_9) = (z-1, z, z+1)$ за естествени числа x, y и z. Тогава можем да пренапишем уравнението $S^2 - 2025 = 8Q$ като

$$(3x + 3y + 3z)^2 - 2025 = 8(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6).$$

Разделяйки двете страни на 3 и разлагайки лявата страна, получаваме:

$$3(x + y + z - 15)(x + y + z + 15) = 8(x^2 + y^2 + z^2 + 2).$$

От съображения по модул 3 за дясната страна, точно едно от числата x, y и z не е кратно на 3. Нека $x = 3u + 1$, $y = 3v$, $z = 3w$ за $u, v, w \in \mathbb{N}$ (избрахме $x = 3u + 1$, но решения могат да се намерят и в случая $x = 3u + 2$). Пренаписвайки уравнението отново, получаваме:

$$(3u + 3v + 3w - 14)(3u + 3v + 3w + 16) = 8(3u^2 + 3v^2 + 3w^2 + 2u + 1).$$

Можем да забележим, че $u \equiv 2 \pmod 3$, разглеждайки уравнението отново по модул 3. При $u = 2$ уравнението е еквивалентно на

$$3(v - w)^2 + \frac{1}{2}(2v - 7)^2 + \frac{1}{2}(2w - 7)^2 + 55 = 0.$$

Последното няма решения, понеже лявата страна е положителна, а при $u = 5$ намираме $(v; w) = (7; 10)$, което води до решението

$$(a_1, a_2, \ldots, a_9) = (15, 16, 17, 20, 21, 22, 29, 30, 31).$$

Оценяване. (7 точки) 5 т. за $n \geq 9$, (1 т. за доказване $n \geq c$, където $c \in [3..8]$); 2 т. за показване, че $n = 9$ е възможен (пример).