Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

Задача 12.1. Редицата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е зададена чрез

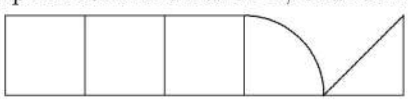
$$\begin{aligned} a_0 &= c, \\ a_{n+1} &= a_n^2 + \frac{a_n}{2} + c \text{ за } n \geq 0, \end{aligned}$$

където $c > 0$ е реален параметър. Да се намерят всички стойности на c, за които редицата (a_n) е сходяща и при тези стойности да се определи нейната граница.

Задача 12.2. Даден е $\triangle ABC$ и точка X е във вътрешността му. Нека точките S_A, S_B и S_C са средите на дъгите $\overparen{BXC}$, $\overparen{AXC}$ и $\overparen{AXB}$ в окръжностите, описани съответно около $\triangle BXC$, $\triangle AXC$ и $\triangle AXB$. Да се докаже, че точките S_A, S_B, S_C и X лежат на една окръжност.

Задача 12.3. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Ако $m \in \mathbb{N}$ е такова, че делителите на m могат да се разбият на n непресичащи се множества, така че сумата от числата във всяко множество е една и съща, то да се докаже, че $m \geq 2^{n+1} - 2$.

Задача 12.4. Нека L е фигурата, съставена от 3 единични квадрата, четвърт кръг с радиус 1 и правоъгълен равнобедрен триъгълник с катет 1, скачени така:



Да се докаже, че всеки 18 точки в равнината могат да се покрият с копия на L, които не се припокриват в свои вътрешни точки. (Копията на L могат да бъдат ротирани и обръщани.)