Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 12.1. Редицата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е зададена чрез

$$a_0 = c,$$
$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{a_n}{2} + c \text{ за } n \geq 0,$$

където $c > 0$ е реален параметър. Да се намерят всички стойности на c, за които редицата (a_n) е сходяща и при тези стойности да се определи нейната граница.

Отговор. $c \in (0, 1/16]$.

Решение. Нека първо $c > \frac{1}{16}$. Тогава имаме

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{16} + \frac{a_n}{2} + c - \frac{1}{16} \geq a_n + (c - \frac{1}{16}),$$

т.к $x^2 + \frac{1}{16} \geq \frac{x}{2}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Така получаваме, че $a_n \geq c + (n-1)(c - \frac{1}{16})$ за $n \in \mathbb{N}$, т.е редицата е неограничена и следователно не е сходяща.

Обратно, нека $c \leq \frac{1}{16}$. Ще докажем с индукция по n, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила $a_n \geq a_{n-1}$ и $a_n \leq l$, където l е по-малкият корен на уравнението $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + c = 0$.
За $n = 0$ е ясно, че $a_1 > c = a_0$, а т.к $f(c) = c^2 + \frac{c}{2} > 0$ и c е по-малко от поне един от двата корена на f(това е вярно т.к уравнението има поне един корен по-голям от $1/4$ от формулите на Виет) то следва, че $c < l$.
Ако допуснем, че твърдението е вярно за n, то т.к имаме $a_{n+1} - a_n = f(a_n)$, получаваме, че $f(a_n) > 0$, понеже $a_n < l$. Също така имаме, че

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{a_n}{2} + c \leq l^2 + \frac{l}{2} + c = l,$$

където първото неравенство следва, т.к $x \mapsto x^2 + \frac{x}{2}$ е растяща в $(0, 1)$, а последното равенство следва от $f(l) = 0$. Така индукцията е завършена откъдето следва, че a_n е растяща и ограничена, следователно сходяща. Ако t е границата ѝ, то $f(t) = 0$ и т.к $a_n < l$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то получаваме, че

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - c}.$$

Оценяване. (6 точки) 3 т. за $c \leq 1/16$, 2 т. за доказване, че ако $c \leq 1/16$, то a_n е растяща, 1 т. за довършване.

Задача 12.2. Даден е $\triangle ABC$ и точка X е във вътрешността му. Нека точките S_A, S_B и S_C са средите на дъгите $\overset{\frown}{BXC}$, $\overset{\frown}{AXC}$ и $\overset{\frown}{AXB}$ в окръжностите, описани съответно около $\triangle BXC$, $\triangle AXC$ и $\triangle AXB$. Да се докаже, че точките S_A, S_B, S_C и X лежат на една окръжност.

Решение. Нека l_A е правата през A, перпендикулярна на AX и нека l_B, l_C са дефинирани аналогично. Нека $l_B \cap l_C = A_1$, $l_C \cap l_A = B_1$ и $l_A \cap l_B = C_1$. Имаме, че A_1S_A е вътрешната ъглополовяща на $\measuredangle B_1A_1C_1$, т.к $A_1 \in (BXC)$. Така получаваме, че правите A_1S_A, B_1S_B, C_1S_C се пресичат в точка I, където I е центърът на вписаната окръжност в $\triangle A_1B_1C_1$. Също така имаме, че A_1X е диаметър в (BXC), следователно $\measuredangle IS_AX = 90°$, т.е S_A лежи на окръжността с диаметър IX. Аналогично получаваме, че точките S_B и S_C лежат на същата окръжност, с което задачата е решена.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за построяване на l_A, l_B, l_C, 2 т. за доказване, че A_1S_A, B_1S_B и C_1S_C се пресичат в една точка, 2 т. за довършване.

Задача 12.3. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Ако $m \in \mathbb{N}$ е такова, че делителите на m могат да се разбият на n непресичащи се множества, така че сумата от числата във всяко множество е една и съща, то да се докаже, че $m \geq 2^{n+1} - 2$.

Решение. Първи метод. За $n = 2$ твърдението се проверява директно. Нататък ще считаме, че $n \geq 3$ и $m \geq 7$. Да отбележим, че m се среща в някоя от групите, така че $mn \leq \sum\limits_{d|m} d$.

Нека $k \in (m/3, m/2)$ е естествено число (такова има поради $m \geq 7$). Тогава

$$mn \leq \sum_{d|m} d = \sum_{d|m} \frac{m}{d} \leq m \left(\sum_{d \leq m, d|m} \frac{1}{d} \right)$$

$$\leq m \left(\sum_{d \leq m/2, d|m} \frac{1}{d} \right) + 1$$

$$\leq m \left(\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \right) - \frac{m}{k} + 1$$

$$< m \left(\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \right),$$

понеже m няма делители между $\frac{m}{2}$ и m и т.к k не дели m.
От друга страна имаме, че ако $t \in \mathbb{N}$ е такова, че $2^t \leq m < 2^{t+1}$, то

$$\sum_{d \leq m/2} \frac{1}{d} \leq \sum_{d < 2^t} \frac{1}{d} = \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{d=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{d} \leq \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{d=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{2^s} = t$$

Така получаваме, че $t > n$, откъдето следва, че $m \geq 2^{n+1}$.
Коментар. Оценката не е точна, може да се покаже, че $\sum\limits_{d|m} d = O(m \log\log m)$. Ето един възможен начин:
Втори метод. (Д.Грозев) Да означим с $s(x)$ сумата от делителите на $x \in \mathbb{N}$. Имаме $s(m) \geq mn$. Нека $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, където p_i са различни прости числа и $a_i \geq 1$. Имаме

$$s(m) \leq m \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^j},$$

защото всеки делител на m присъства в дясната страна. И така,

$$s(m) \leq m \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \leq m \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1}\right).$$

Тук използвахме неравенството $1 + x \leq e^x$. Нататък,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i - 1} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} < \ln(k+1) \qquad (1),$$

където $q_1, q_2, \ldots, q_k$ са първите k прости числа. Това дава $mn \leq s(m) < m(k+1)$ или $k > n - 1$, значи $k \geq n$. При $n \geq 3$ получаваме

$$m \geq \prod_{i=1}^{k} q_i \geq 2 \cdot 3 \cdot 5^{k-2} \geq 6 \cdot 5^{n-2} > 5^{n-1} > 2^{n+1}.$$

При $n=2$ имаме $k\geq 2$ и $m\geq 2\cdot 3=6$. Вижда се, че $n=2, m=6$ възможно, другите опции са $n=2, m\geq 12$ (ако въобще има такива.)

Коментар. Оценката в (1), може да се подобри така

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_1-1}\leq 1+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{q_k}\leq 1+1+\ln\ln k.$$

Така получаваме, $mn\leq s(m)\leq me^2\ln k$ и значи $\ln k\geq n/e^2$, $k\geq e^{n/9}$ и

$$m\geq\prod_{i=1}^{k}q_i\geq 2^k\geq 2^{e^{n/9}}.$$

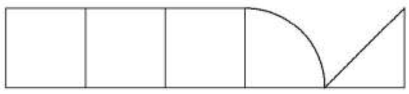
Също може да се докаже, че

$$\sum_{d|m}d\leq H_m+\log H_m e^{H_m},$$

където $H_m=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}$.

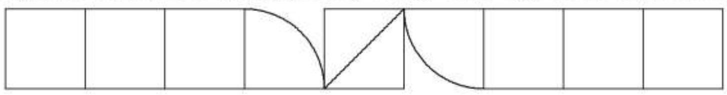
Оценяване. (7 точки) 1 т. за $mn\leq\sum\limits_{d|m}d$, 3 т. за подходяща нетривиална оценка за $\sum\limits_{d|m}d$, 1 т. за m няма делител в $(m/2, m)$ **и** $(m/3, m/2)$, 2 т. за довършване. Случаят $n=2$ не носи точки!

Задача 12.4. Нека L е фигурата, съставена от 3 единични квадрата, четвърт кръг с радиус 1 и правоъгълен равнобедрен триъгълник с катет 1, скачени така:



Да се докаже, че всеки 18 точки в равнината могат да се покрият с копия на L, които не се припокриват в свои вътрешни точки. (Копията на L могат да бъдат ротирани и обръщани.)

Решение. Да разгледаме следната фигура M, получена чрез залепяне на 2 копия на L.



Имаме, че M се съдържа в правоъгълник с размери 1×9 и заема повече от $17/18$ от лицето му. Нека S е множество от 18 точки в равнината и нека C е случайно покриване на равнината с правоъгълници 1×9. По-конкретно фиксираме покриване A на равнината с правоъгълници 1×9 и избираме $X\sim U[0,9], Y\sim U[0,1]$, а след това получаваме C като транслираме A с X единици в x направлението и Y единици в y направлението. Всяко такова покриване на равнината дава еднозначно определено покритие на част от равнината с копия на M.

Да отбележим, че за всяка точка $s\in S$ имаме

$$\mathbb{P}(s \text{ е покрита от някое копие на } M)>17/18.$$

Така получаваме, че $\mathbb{P}(s \text{ не е покрита от копие на } M) < \frac{1}{18}$. Следователно

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\exists\ s \in S : s \text{ не е покрита от копия на } M\right) &\leq \sum_{s\in S} \mathbb{P}(s \text{ не е покрита от копия на } M) \\ &< |S|/18 = 1,\end{aligned}$$

откъдето следва, че съществува покриване на равнината, за което всяка точка от S е покрита от някое копие на M.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за разглеждане на M, 5 т. за довършване. 3 т. за доказване на по-слабо твърдение като „всеки 8 точки в равнината могат да се покрият с копия на L“ чрез вероятностен метод.

Задачите са предложени от: 8.1 и 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2 и 8.3 – Мирослав Маринов; 9.1 и 9.4 – Константин Делчев; 9.2 и 9.3 – Любен Балтаджиев; 10.1 – Станислав Харизанов; 10.2, 10.3 и 10.4 – Божидар Димитров; 11.1 и 11.2 – Емил Колев; 11.3 – Cristi Savescu; 11.4 – Марин Христов; 12.1, 12.2, 12.3 – Кристиян Василев; 12.4 – Teun Verstraaten.