Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир ”Академик Стефан Додунеков”

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Шести клас

Задача 1. В аквариум с форма на правоъгълен паралелепипед имало определено количество вода. При почистване източили 40% от водата. След това добавили филтрирана вода, при което увеличили с 40% количеството вода, останало след източването. Накрая в аквариума имало 2,1 литра вода.

а) Колко литра вода имало в аквариума отначало?

б) Широчината на дъното на аквариума е 20 cm и е с 20% по-малка от неговата дължина. Околната повърхнина на аквариума е 7,2 dm^2. Колко процента от обема на аквариума са били запълнени с вода отначало?

Решение. а) Нека отначало в аквариума е имало x литра вода. След източването са останали $60\%x$ литра, а след доливането на филтрираната вода, в аквариума имало $140\%.60\%x = 84\%x$ литра вода. От равенството $84\%x = 2{,}1$ намираме $x = 2{,}5$ литра.

б) Широчината на дъното $a = 20$ cm е с 20% по-малка от дължината b, т.е. е равна на $80\%b$. От равенството $20 = 80\%b$ намираме $b = 25$ cm. Обиколката на дъното е $P = 90$ cm и тъй като $S = 7,2\ \mathrm{dm}^2 = 720\ \mathrm{cm}^2$, височината на аквариума е $c = S : P = 720 : 90 = 8$ cm.

Обемът на аквариума е $V = 20.25.8 = 4000\ \mathrm{cm}^3 = 4\ \mathrm{dm}^3$.

Водата отначало е $\dfrac{2,5}{4} = 62,5\%$ от обема на аквариума.

Оценяване. а) Пълно решение: 3 точки.

Намиране, че крайното количество е 84% от първоначалното – 2 точки.

Определяне на началното количество вода – 1 точка.

Ако се решава като рачешка задача, по 1,5 т. за всяка стъпка.

б) Пълно решение: 3 точки.

Намиране на дължината – 1 точка.

Намиране на виочината – 1 точка.

Намиране на обема и определяне на търсения процент – 1 точка.

Задача 2. За дадени числа a, b, c, d означаваме $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$. Например, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = 2$.

а) Пресметнете сбора

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 43 & -44 \\ -46 & 45 \end{vmatrix}$$

б) Намерете числото X в равенството

$$\begin{vmatrix} X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{23} \\ \frac{1}{24} & 22 \end{vmatrix} = \frac{11}{12}.$$

Решение. а) Забелязваме, че

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - (-b) \cdot (-c) = a \cdot d - b \cdot c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Следователно $S = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 43 & 44 \\ 46 & 45 \end{vmatrix} =$

$= (0 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5) + \dots + (43 \cdot 45 - 44 \cdot 46) = 0 - 44 \cdot 46 = -2024$,

тъй като в получения сбор събираемите, без първото и последното, се разделят на двойки противоположни със сбор 0.

б) Даденото равенство се записва във вида

$$-X - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2X - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - 3X - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + 4X - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \dots + 22X - \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{24} = \frac{11}{12}.$$

Имаме

$-X + 2X - 3X + 4X + \dots + 22X = (-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots - 21 + 22)X = 11X$,

тъй като $-1 + 2 = -3 + 4 = \dots = -21 + 22 = 1$. От друга страна,

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{24} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{24}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) = -\frac{11}{24}.$$

Получаваме $11X - \frac{11}{24} = \frac{11}{12}$, откъдето намираме $X = \frac{1}{8}$.

Оценяване. а) Пълно решение: 2 точки.

б) Пълно решение: 4 точки.

Определяне на коефициента пред X – 1,5 точки.

Пресмятане на телескопичния сбор – 1,5 точки.

Намиране на X – 1 точка.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC. На страната AB е отбелязана точка M така, че $AM = \dfrac{1}{2}AB$; на страната AC е отбелязана точка K така, че $AK = \dfrac{1}{3}AC$; на страната BC е отбелязана точка L така, че $BL = \dfrac{1}{4}BC$. Отсечките KL и CM се пресичат в точка O и лицето на четириъгълника $AMOK$ е 36 cm^2.

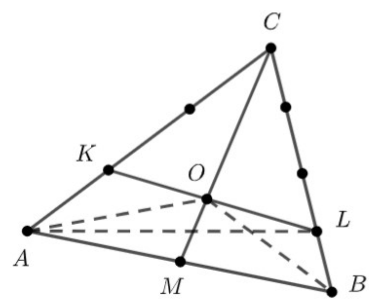
Намерете лицето на триъгълника COL и лицето на триъгълника ABC.

Решение. Ако h_L е разстоянието от L до AC, а h_A е разстоянието от A до BC, имаме

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ALC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot CK\cdot h_L}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h_L} = \frac{CK}{AC} = \frac{2}{3}, \quad \frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot CL\cdot h_A}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_A} = \frac{CL}{BC} = \frac{3}{4}$$

и като умножим тези равенства, получаваме

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$



Следователно лицето на триъгълника CKL е равно на половината от лицето на триъгълника ABC. От друга страна,

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AM\cdot h_C}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h_C} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2},$$

т.е. лицето на триъгълника AMC е равно на половината от лицето на триъгълника ABC (по-нататък ще използваме това свойство на медианата без доказателство).

Следователно $S_{AMC} = S_{CKL}$, т.е.

$$S_{AMOK} + S_{KOC} = S_{KOC} + S_{COL} \iff S_{AMOK} = S_{COL}.$$

Така получихме, че $S_{COL} = 36$ cm^2.

От $\dfrac{S_{COB}}{S_{COL}} = \dfrac{BC}{LC} = \dfrac{4}{3}$ следва, че

$$S_{COB} = \frac{4}{3}S_{COL} = 48 \text{ cm}^2.$$

Тъй като CM е медиана в триъгълника ABC, то $S_{AMC} = S_{BMC}$.

Освен това, OM е медиана в триъгълника ABO и $S_{AMO} = S_{BMO}$.

Като извадим почленно двете равенства. получаваме

$$S_{AOC} = S_{COB}, \text{ т.е. } S_{AOC} = 48 \text{ cm}^2.$$

Но $\dfrac{S_{AOK}}{S_{AOC}} = \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{1}{3}$, следователно

$$S_{AOK} = \frac{1}{3}S_{AOK} = 16 \text{ cm}^2.$$

Тогава

$$S_{AOM} = S_{AMOK} - S_{AOK} = 36 - 16 = 20 \text{ cm}^2,$$

откъдето и $S_{BMO} = 20 \text{ cm}^2$. Така $S_{ABC} = 2.(20 + 48) = 136 \text{ cm}^2$.

Оценяване. Доказателство, че лицето на триъгълника CKL е равно на половината от лицето на триъгълника ABC – 2 точки.

Доказателство, че $S_{AMC} = S_{CKL}$ – 1 точка.

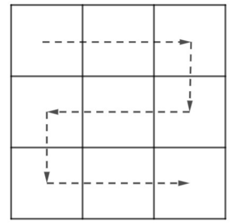
Намиране на лицето на COL – 1 точка.

Намиране на S_{COB} – 1 точка.

Намиране на S_{AOK} – 1 точка,

Намиране на S_{ABC} – 1 точка.

Задача 4. Серпентина ще наричаме квадратна таблица $n \times n$, в която са записани последователни цели числа по следния начин: най-малкото от числата е в горния ляв ъгъл; в първия ред числата нарастват отляво надясно; в последното поле от реда се прави завой към полето под него; във втория ред числата нарастват отдясно наляво и т.н. (Стрелките на фиг. 1 показват реда на попълване на последователните числа в серпентина 3×3.)



Фиг. 1

При всеки ход се избират две съседни полета в таблицата (т.е. полета с обща страна) и към числата в тях се прибавя едно и също число. На фиг. 2 са показани два поредни хода в таблица 3×3: при първия ход към числата в сивите квадратчета се прибавя 2, а при втория ход към избраните квадратчета се прибавя (-6).

-2	-1	0
3	2	1
4	5	6

$\rightarrow$

0	-1	0
5	2	1
4	5	6

$\rightarrow$

0	-1	0
5	2	1
4	-1	0

Фиг. 2

Една серпентина наричаме **особена**, ако след няколко хода от нея може да се получи таблица, във всички полета на която е записана 0.

а) Намерете всички особени серпентини при $n = 5$.

б) Съществува ли особена серпентина при $n = 10$?

Решение. Ако оцветим таблицата шахматно, при всеки ход едно бяло и едно черно поле се увеличават или намаляват с едно и също число. Това означава, че разликата между сбора на числата в белите полета и сбора на числата в черните полета се запазва.

а) Общият вид на серпентина 5×5 е следният:

$a-12$	$a-11$	$a-10$	$a-9$	$a-8$
$a-3$	$a-4$	$a-5$	$a-6$	$a-7$
$a-2$	$a-1$	a	$a+1$	$a+2$
$a+7$	$a+6$	$a+5$	$a+4$	$a+3$
$a+8$	$a+9$	$a+10$	$a+11$	$a+12$

Сборът на числата в черните полета е $S_b = 13a$, а сборът на числата в белите полета е $S_w = 12a$. След всеки ход се запазва разликата между сбора на числата в черните полета и сбора на числата в белите полета, който отначало е $S_b - S_w = a$.

Следователно ако серпентината 5×5 е особена, то $a = 0$.

Остава да покажем, че при $a = 0$ с няколко хода може да се получи таблица само с 0. В таблицата

-12	-11	-10	-9	-8
-3	-4	-5	-6	-7
-2	-1	0	1	2
7	6	5	4	3
8	9	10	11	12

разделяме полетата по двойки и след 10 хода

$$(-12;-11) \to (0;1),\ (-10;-9) \to (1;2),\ (-8;-7) \to (2;3),$$
$$(-6;-5) \to (3;4),\ (-4;-3) \to (4;5),\ (-2;-1) \to (5;6),$$
$$(7;8) \to (0;1),\ (9;10) \to (1;2),\ (5;4) \to (2;1),\ (3;12) \to (2;11)$$

стигаме до таблица, в която има 11 двойки съседни полета, във всяка от които са записани равни числа:

0	1	1	2	2
5	4	4	3	3
5	6	0	1	2
0	6	2	1	2
1	1	2	11	11

От тук с 11 хода получаваме таблица само с 0.

б) В серпентина 10×10 са записани 100 числа; ако в горния ляв ъгъл е числото $a - 50$, най-голямото число в таблицата $a + 49$ ще е записано в долния ляв ъгъл. Сборът на всички числа в таблицата е $100a - 50$.

Ако оцветим таблицата шахматно така, че $a - 50$ да е в черно поле, сборът на числата в черните полета ще е

$$S_b = (a-50)+(a-48)+\cdots+(a-2)+a+(a+2)+\cdots+(a+48) = 50a-50,$$

а сборът на числата в белите полета ще е

$$S_w = (100a - 50) - (50a - 50) = 50a,$$

което означава, че $S_w - S_b = 50$ след всеки ход. Това означава, че не съществува особена серпентина 10×10.

Забележка. По същия начин може да се докаже, че особена серпентина съществува само за нечетно n.

Оценяване. За шахматно оцветяване и съображението, че сборът на числата в черните полета се променя по същия начин като сбора на числата в белите полета – 1 т.

а) Доказателство, че в централното квадратче е записана 0 – 2 точки.

Пример как се стига до таблица само с 0 – 2 точки.

б) Доказателство, че разликата на сбора на числата в черните полета и сбора на числата в белите полета е ненулева константа – 2 точки.