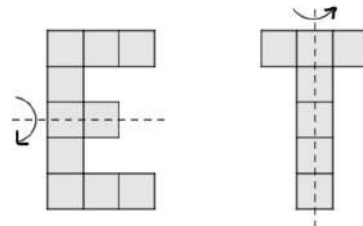


## Есенен математически турнир ”Академик Стефан Додунеков”

София, 15-17 ноември 2024 г.

Тема за 7. клас

**Задача 1.** Фигурите **E** и **T** на чертежа са съставени от квадратчета със страна 2 см. Всяка от фигурите се завърта на  $360^\circ$  около оста си на симетрия (означена с пунктир) и се получават ротационните тела  $P_E$  и  $P_T$ .



- а) Намерете отношението на лицата на повърхнините на  $P_E$  и  $P_T$ .
- б) Машинни детайли с формата и размерите на  $P_E$  и  $P_T$  се отляти от метална сплав. Намерете съответната им маса, като използвате, че  $1 \text{ cm}^3$  от сплавта тежи 7 g и приемете, че  $\pi \approx \frac{22}{7}$ .

**Задача 2.** Намерете всички двойки естествени числа  $(p; q)$ , за които

$$p^2 - q^2 = M,$$

където

$$M = \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}}.$$

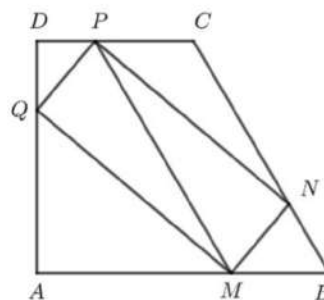
**Задача 3.** Даден е правоъгълен трапец  $ABCD$  с основи  $AB$  и  $CD$  и прав ъгъл при върха  $A$ . В четириъгълника е вписан правоъгълник  $MNPQ$ , така че  $M, N, P, Q$  лежат съответно на страните  $AB, BC, CD, DA$  и

$$PD : DQ = DQ : QA = QA : AM = 3 : 4,$$

а диагоналят  $MP$  е успореден на  $BC$ .

- а) Намерете отношението  $DP : PC$ .
- б) Върху отсечката  $AM$  е избрана точка  $X$  така, че отсечката  $AX$  е равна на 37% от  $MB$ . Пресечната точка на отсечките  $PN$  и  $MC$  е означена с  $E$ , а пресечната точка на  $PX$  и  $MQ$  с  $F$ . Докажете, че

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}.$$



**Задача 4.** За редица от нули и единици са разрешени следните действия:

*Действие X:* две поредни цифри 01 се заменят с 10. Например,

$$1010 \xrightarrow{X} 1100.$$

*Действие Y:* две поредни цифри 01 се заменят с 110. Например,

$$1010 \xrightarrow{Y} 11100.$$

а) Започваме от редица  $A$ , която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие  $X$ :

$$A \xrightarrow{X} A_1 \xrightarrow{X} A_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$

Най-много колко пъти последователно може да се приложи действие  $X$ ?  
При коя начална редица  $A$  се получава това?

б) Започваме от редица  $B$ , която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие  $Y$ :

$$B \xrightarrow{Y} B_1 \xrightarrow{Y} B_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$

Най-много колко цифри може да има в редица, която е получена по този начин?