Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

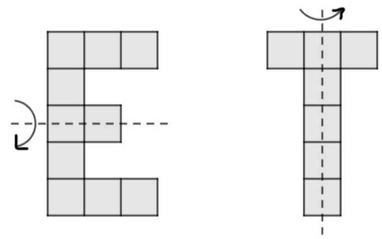
Есенен математически турнир ”Академик Стефан Додунеков”

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Тема за 7. клас

Задача 1. Фигурите **E** и **T** на чертежа са съставени от квадратчета със страна 2 cm. Всяка от фигурите се завърта на 360° около оста си на симетрия (означена с пунктир) и се получават ротационните тела P_{E} и P_{T}.



а) Намерете отношението на лицата на повърхнините на P_{E} и P_{T}.

б) Машинни детайли с формата и размерите на P_{E} и P_{T} се отляти от метална сплав. Намерете съответната им маса, като използвате, че 1 cm^3 от сплавта тежи 7 g и приемете, че $\pi \approx \dfrac{22}{7}$.

Решение. а) Повърхнината на P_{E} се състои от: околната повърхнина на цилиндър с $r = 5$ cm, $h = 6$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 4$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 2$ cm; кръг с $r = 5$ cm; кръг с $r = 1$ cm и два кръгови венеца, които общо съставят кръг с $r = 5$ cm. Следователно

$$S_{\text{E}} = 2\pi.5.6 + 2\pi.3.4 + 2\pi.1.2 + 2.\pi.5^2 = 138\pi \text{ cm}^2.$$

Повърхнината на P_{T} се състои от: околната повърхнина на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 2$ cm; околната повърхнина на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 8$ cm; кръг с $r = 3$ cm; кръг с $r = 1$ cm и кръгов венец, които общо съставят кръг с $r = 3$ cm. Следователно

$$S_{\text{T}} = 2\pi.3.2 + 2\pi.1.8 + 2\pi.3^2 = 46\pi \text{ cm}^2.$$

Намираме $S_{\text{E}} : S_{\text{T}} = 138\pi : 46\pi = 3 : 1$.

б) Обемът на P_{E} се получава, като се съберат обемите на цилиндър с $r = 5$ cm, $h = 6$ cm и на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 2$ cm и се извади обемът на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 4$ cm, т.е.

$$V_{\text{E}} = \pi.5^2.6 + \pi.1^2.2 - \pi.3^2.4 = 116\pi \text{ cm}^3.$$

Тогава масата на P_{E} е приблизително $116 \cdot \dfrac{22}{7} \cdot 7 = 2552$ g.

Обемът на P_{T} се се получава, като се съберат обемите на цилиндър с $r = 3$ cm, $h = 2$ cm и на цилиндър с $r = 1$ cm, $h = 8$ cm, т.е.

$$V_{\text{T}} = \pi.3^2.2 + \pi.1^2.8 = 26\pi \text{ cm}^3.$$

Тогава масата на P_{T} е приблизително $26 \cdot \dfrac{22}{7} \cdot 7 = 572$ g.

Оценяване. а) Пълно решение: 3 точки.

б) Пълно решение: 3 точки.

Задача 2. Намерете всички двойки естествени числа $(p; q)$, за които

$$p^2 - q^2 = M,$$

където

$$M = \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}}.$$

Решение. Ако означим $p - 2q = n$, имаме

$$M = \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}} = \frac{12^{n} \cdot 75^{6-3n}}{18^{2n-3} \cdot 15^{11-6n}} =$$

$$= \frac{(2^{2n} \cdot 3^{n}) \cdot (3^{6-3n} \cdot 5^{2(6-3n)})}{(2^{2n-3} \cdot 3^{2(2n-3)}) \cdot (3^{11-6n} \cdot 5^{11-6n})} = \frac{2^{2n} \cdot 3^{6-2n} \cdot 5^{12-6n}}{2^{2n-3} \cdot 3^{5-2n} \cdot 5^{11-6n}} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Тогава

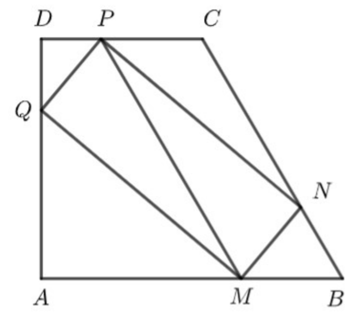
$$p^2 - q^2 = 120 \iff (p-q)(p+q) = 120.$$

Множителите $p-q$ и $p+q$ са с еднаква четност, като $p-q < p+q$. Тъй като произведението е четно, то $p-q$ и $p+q$ са четни числа. Числото 120 може да се представи като произведение на две четни числа по четири начина $(2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12)$ и получаваме следните възможности:

1. случай. $p-q = 2$ и $p+q = 60$, откъдето $p = 31$ и $q = 29$ са решение;
2. случай. $p-q = 4$ и $p+q = 30$, откъдето $p = 17$ и $q = 13$ са решение;
3. случай. $p-q = 6$ и $p+q = 20$, откъдето $p = 13$ и $q = 7$ са решение;
4. случай. $p-q = 10$ и $p+q = 12$, откъдето $p = 11$ и $q = 1$ са решение.

Оценяване. Намиране на M – 3 точки.
Намиране на двойките решения – 3 точки.

Задача 3. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ с основи AB и CD и прав ъгъл при върха A. В четириъгълника е вписан правоъгълник $MNPQ$, така че M, N, P, Q лежат съответно на страните AB, BC, CD, DA и



$$PD : DQ = DQ : QA = QA : AM = 3 : 4,$$

а диагоналът MP е успореден на BC.

а) Намерете отношението $DP : PC$.

б) Върху отсечката AM е избрана точка X така, че отсечката AX е равна на 37% от MB. Пресечната точка на отсечките PN и MC е означена с E, а пресечната точка на PX и MQ с F. Докажете, че

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}.$$

Решение. От $PD = 3k$, $DQ = 4k$ по Питагорова теорема за триъгълника DPQ получаваме $QP^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$, т.е. $QP = 5k$.

Аналогично, от $QA = 3n$, $AM = 4n$ намираме $QM = 5n$.

Тъй като $DQ : QA = 3 : 4$, то

$$\frac{4k}{3n} = \frac{3}{4} \iff k : n = 9 : 16.$$

Изразяваме $S_{MNPQ} = 5k \cdot 5n = 25kn$ и $S_{MNP} = \dfrac{1}{2} S_{MNPQ} = \dfrac{25}{2} kn$.

Тъй като PM е успоредна на BC и AB е успоредна на CD, то $MBCP$ е успоредник. Тогава

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot h_{MP} = \frac{1}{2} \cdot S_{MBCP}$$

и получаваме, че $S_{MBCP} = 2S_{MNP} = 25kn$.

От друга страна, $S_{MBCP} = PC \cdot AD$ и тъй като

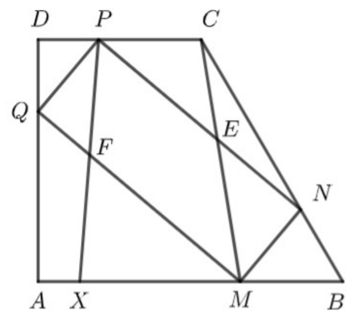
$$AD = 4k + 3n = 4 \cdot \frac{9}{16} n + 3n = \frac{21}{4} n,$$

от равенството $25kn = PC \cdot \dfrac{21}{4} n$ намираме $PC = \dfrac{100}{21} k$. Тогава

$$DP : PC = 3 : \frac{100}{21} = 63 : 100.$$

б) Имаме $AX = 37\%MB = 37\%PC = 37\% \cdot \dfrac{100}{21}k = \dfrac{37}{21}k$.

Равенството



$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}$$

е еквивалентно на

$$S_{MNPQ} = S_{AXPD} + S_{MBC}$$

(получава се, като се прибави към двете страни на равенството $S_{FPQ} + S_{MNE}$). Но

$$S_{AXPD} + S_{MBC} = \frac{AX + DP}{2} \cdot AD + \frac{MB}{2} \cdot AD = \frac{AX + DP + MB}{2} \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{37}{21}k + 3k + \frac{100}{21}k\right) \cdot \frac{21}{4}n = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{21}k \cdot \frac{21}{4}n = 25kn = S_{MNPQ},$$

което искахме да докажем.

Оценяване. а) Пълно решение: 5 точки.

Изразяване на PD, DQ, QA, AM – 1 точка.

Прилагане на Питагоровата теорема и изразяване на страните и лицето на правоъгълника – 2 точки.

Доказателство, че лицето на успоредника $MBCP$ е равно на лицето на правоъгълника – 1 точка.

Изразяване на PC и намиране на търсеното отношение – 1 точка.

б) Пълно решение: 2 точки.

Свеждане на даденото равенство до $S_{MNPQ} = S_{AXPD} + S_{MBC}$ – 1 точка.

Доказване на това равенство – 1 точка.

Задача 4. За редица от нули и единици са разрешени следните действия:

Действие X: две поредни цифри 01 се заменят с 10. Например,
$$1\mathbf{01}0 \xrightarrow{X} 1\mathbf{10}0.$$
Действие Y: две поредни цифри 01 се заменят с 110. Например,
$$1\mathbf{01}0 \xrightarrow{Y} 1\mathbf{110}0.$$

а) Започваме от редица A, която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие X:
$$A \xrightarrow{X} A_1 \xrightarrow{X} A_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$
Най-много колко пъти последователно може да се приложи действие X? При коя начална редица A се получава това?

б) Започваме от редица B, която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие Y:
$$B \xrightarrow{Y} B_1 \xrightarrow{Y} B_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$
Най-много колко цифри може да има в редица, която е получена по този начин?

Решение. а) Нека в редицата A има a цифри 0 и $20-a$ цифри 1.

Към всяка двойка 0 и 1 в A действието X може да се приложи най-много веднъж (защото след това тази нула минава вдясно от единицата). Двойките 0 и 1 в редицата A са $a(20-a)$ на брой. Следователно действието X може да се приложи най-много $a(20-a)$ пъти. Тази стойност се реализира при $A = \underbrace{0\ldots0}_{a}\underbrace{1\ldots1}_{20-a}$:

$$\underbrace{0\ldots0}_{a}\underbrace{1\ldots1}_{20-a} \xrightarrow{X} \underbrace{0\ldots0}_{a-1}10\underbrace{1\ldots1}_{19-a} \xrightarrow{X} \underbrace{0\ldots0}_{a-2}100\underbrace{1\ldots1}_{19-a} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X}$$

$$1\underbrace{0\ldots0}_{a}\underbrace{1\ldots1}_{19-a} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} 11\underbrace{0\ldots0}_{a}\underbrace{1\ldots1}_{18-a} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} \underbrace{1\ldots1}_{20-a}\underbrace{0\ldots0}_{a}.$$

Броят на действията X в редица с a цифри 0 и $20-a$ цифри 1 е най-много
$$a(20-a) = 100-(a-10)^2 \leqq 100,$$
т.е. е най-много 100, като тази стойност се достига при $a = 10$ и $A = \underbrace{0\ldots0}_{10}\underbrace{1\ldots1}_{10}$.

б) Нека вляво от дадена цифра 1 има k цифри 0. Това поражда следните последователни действия Y:

$$\underbrace{0\ldots0}_{k}1 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-1}110 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-2}11010 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-2}111100 \xrightarrow{Y}$$

$$\underbrace{0\ldots0}_{k-3}11011100 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-3}111101100 \xrightarrow{Y} \underbrace{0\ldots0}_{k-3}1111110100 \xrightarrow{Y}$$

$$\underbrace{0\ldots0}_{k-3}\underbrace{11111111}_{2^3}000 \xrightarrow{Y} \cdots \xrightarrow{Y} \underbrace{1\ldots1}_{2^k}\underbrace{0\ldots0}_{k}$$

Ако в редицата има b цифри 0 и $c = 20 - b$ цифри 1, най-дългата възможна редица е с дължина $c \cdot 2^b + b$. Ако увеличим броя на единиците до $c+1$ и нулите станат $b-1$, получаваме максимална дължина $(c+1) \cdot 2^{b-1} + b - 1$. Тъй като

$$c \cdot 2^b + b = 2c \cdot 2^{b-1} + b > (c+1) \cdot 2^{b-1} + b - 1,$$

следва, че с увеличаване на броя на единиците, максималната дължина на редиците намалява.

Следователно най-дълга редица се получава, когато $c = 1$ и $b = 19$.

Получихме, че с действие Y може да се получи редица с най-много $2^{19} + 19$ цифри.

Оценяване. а) Пълно решение: 2 точки.

За посочване на верен отговор за максимален брой ходове – 0,5 точки.

Посочване на примера, при който се достига максимумът – 0,5 точки.

Доказателство – 1 точка.

б) Пълно решение: 5 точки.

За посочване на верен отговор за максималната дължина – 1 точка.

Посочване на примера, при който се достига най-голяма дължина на редицата – 1 точка.

Доказателство – 3 точки.