Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

Задача 8.1. Дадени са изразите $A = x^3 + 2x^2y + 2xy + 4y^2$ и $B = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 2y^3$.
а) Да се разложи на два неконстантни множителя с рационални коефициенти всеки от изразите A, B и $A + 4.B$.
б) Ако $x + 2y = 5$ и $y + 2x^2 = 7$, то намерете най-големия прост делител на цялото число $A + 4.B$.

Задача 8.2. На лист хартия е начертан правоъгълен триъгълник ABC с $\measuredangle ACB = 90^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$. Известно е, че могат да се начертаят два кръга с радиус 1 cm върху листа така, че всяка точка от вътрешността или обиколката на триъгълника ABC да лежи във вътрешността или обиколката на поне един от кръговете.
а) Покажете един възможен начин за това при $BC = 3$ cm.
б) Докажете, че $BC \leq 3$ cm.

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа n, такива че

$$a + b + c \quad \text{дели} \quad a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} - n(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

за всеки три различни естествени числа a, b и c.

Задача 8.4. Дадено е естествено число n. Равностранен триъгълник със страна n е разделен на равностранни триъгълничета със страна 1; техните върхове ще наричаме *възли*. Равностранен триъгълник с върхове три от възлите (и страни не непременно успоредни на страните на началния) ще наричаме *важен*. Означаваме с p_k броя ненаредени двойки различни възли, които са върхове на точно k важни триъгълника. Запишете като многочлен на променливата n в нормален вид изразите: а) $p_0 + p_1 + p_2$; б) $p_1 + 2p_2$.