Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Дадени са изразите $A = x^3 + 2x^2y + 2xy + 4y^2$ и $B = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 2y^3$.
а) Да се разложи на два неконстантни множителя с рационални коефициенти всеки от изразите A, B и $A + 4.B$.
б) Ако $x + 2y = 5$ и $y + 2x^2 = 7$, то намерете най-големия прост делител на цялото число $A + 4.B$.

Решение. а) $A = x^2(x + 2y) + 2y(x + 2y) = (x^2 + 2y)(x + 2y)$.
$B = x^3+2x^2y+x^2y+2xy^2+xy^2+2y^3 = x^2(x+2y)+xy(x+2y)+y^2(x+2y) = (x^2+xy+y^2)(x+2y)$.
$A + 4.B = (x + 2y)(x^2 + 2y + 4x^2 + 4xy + 4y^2) = (x + 2y)(5x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y)$.
б) $A + 4.B = (x + 2y)(x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y + 4x^2) = (x + 2y)\left((x + 2y)^2 + 2(y + 2x^2)\right) = 5(5^2 + 2\,.\,7) = 195$, чийто най-голям прост делител е 13.

Коментар. С повече усилия същият извод се получава с намиране на двойките $(x; y)$, изпълняващи даденото условие, а именно $\left(\frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{145}); \frac{1}{16}(39 \mp \sqrt{145})\right)$, и заместването им в израза, като в този случай аргументацията трябва да е валидна и за двете двойки.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за а) (по 1 т. за вярно разлагане на всеки от изразите), 3 т. за б), от които 2 т. за изразяване на $A+4.B$ чрез $x+2y$ и $y+2x^2$ и 1 т. за правилно извършване на пресмятанията. При подход б) с намиране на x и y: 1 т. за намиране на двете възможности за x и y и по 1 т. за правилно извършване на пресмятанията във всеки от двата случая.

Задача 8.2. На лист хартия е начертан правоъгълен триъгълник ABC с $\measuredangle ACB = 90^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$. Известно е, че могат да се начертаят два кръга с радиус 1 cm върху листа така, че всяка точка от вътрешността или обиколката на триъгълника ABC да лежи във вътрешността или обиколката на поне един от кръговете.
а) Покажете един възможен начин за това при $BC = 3$ cm.
б) Докажете, че $BC \leq 3$ cm.

Решение. а) Нека средата на AB е M и симетралата на AB пресича BC в T. Тогава $\measuredangle TAB = \measuredangle TBA = 30^\circ$ и $\measuredangle CAT = \measuredangle BAC - \measuredangle BAT = 30^\circ$, значи $CT = \frac{AT}{2} = \frac{BT}{2}$, съответно $AT = BT = \frac{2BC}{3} = 2$ cm и $CT = 1$ cm. Сега ако K и L са средите на AT и BT, то от съображения за медиана към хипотенуза следва $AK = KC = KM = KT = 1$ cm и $BL = LM = LT = 1$ cm. Следователно кръговете с центрове K и L и радиус 1 cm покриват ABC.
б) Нека допуснем противното. Както в а) въвеждаме T и получаваме $AT = BT = \frac{2BC}{3} > 2$ cm, а също $AB > BC > 2$ cm. Така A, B, T са три точки, никои две от които не лежат в кръг с радиус 1 см (диаметър 2 cm) и значи няма как ABC да е покрит от два кръга.

Коментар. Може да се докаже, че измежду всички правоъгълни триъгълници, които могат да се покрият от два кръга с радиус 1 cm, с максимално лице е именно този с катет 3 cm и прилежащ към него ъгъл 30°.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за а), от които 1 т. за описание на центровете на двете окръжности и 2 т. за проверка, че те вършат работа; 3 т. за б), от които 1 т. за описание на три точки, всеки две от които са на разстояние над 2 cm и 2 т. за доказателство, че това е така.

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа n, такива че

$$a + b + c \quad \text{дели} \quad a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} - n(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

за всеки три различни естествени числа a, b и c.

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа n, такива че

$$a+b+c \quad \text{дели} \quad a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}-n(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

за всеки три различни естествени числа a, b и c.

Отговор. $n=2$

Решение. Да изберем $b=2$, $c=1$ и нека $a\geq 3$ е произволно – тогава $a+3$ дели $a^{2n}+2^{2n}+1-n(5a^2+4)$. Да положим $d=a+3$ – значи d дели $(d-3)^{2n}+2^{2n}+1-n(5(d-3)^2+4)$ и значи дели и $(-3)^{2n}+2^{2n}+1-49n=9^n+4^n-49n+1$. Така числото $9^n+4^n-49n+1$ има безбройно много естествени делители и трябва непременно да е равно на 0. Директно се проверява, че това не е така за $n=1$, а при $n\geq 3$ индуктивно имаме $9^n>49n$, понеже $9^3=729>441=49\cdot 9$ и (при индукционното предположение) $9^{n+1}=9\cdot 9^n>9\cdot 49n=441n>49n+49=49(n+1)$. Остава $n=2$, което е решение за всякакви a, b, c, понеже $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)=(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$. (Алтернативно, $c\equiv -a-b \pmod{a+b+c}$ и значи $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)\equiv a^4+b^4+(-a-b)^4-2(a^2b^2+b^2(-a-b)^2+(-a-b)^2a^2) \pmod{a+b+c}$, а след разкриване на скобите се вижда, че последното е тъждествено равно на 0.)

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разглеждане на числени стойности, по-малки или равни на 3, на две от променливите, 2 т. за достигане до зависимост с делимо, зависещо само от n, 1 т. за обосновка, че това делимо трябва да е 0, 1 т. за довършване на $n\neq 2$ (напр. чрез неравенства с индукция), 2 т. за доказване, че $n=2$ работи.

Задача 8.4. Дадено е естествено число n. Равностранен триъгълник със страна n е разделен на равностранни триъгълничета със страна 1; техните върхове ще наричаме *възли*. Равностранен триъгълник с върхове три от възлите (и страни не непременно успоредни на страните на началния) ще наричаме *важен*. Означаваме с p_k броя ненаредени двойки различни възли, които са върхове на точно k важни триъгълника. Запишете като многочлен на променливата n в нормален вид изразите: а) $p_0+p_1+p_2$; б) p_1+2p_2.

Отговор. а), б) $\frac{1}{8}(n^4+6n^3+11n^2+6n)$

Решение. а) Броят на възлите е $1+2+\cdots+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Всяка двойка възли участва в 0, 1 или 2 специални триъгълника, така че $p_0+p_1+p_2$ е всъщност броят на всички ненаредени двойки възли:

$$p_0+p_1+p_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot\frac{1}{2}((n+1)(n+2)-1)=\frac{1}{8}(n^4+6n^3+11n^2+6n).$$

б) Имаме $p_1+2p_2=3S$, където S е броят важни триъгълници, понеже всеки триъгълник е броен по веднъж откъм трите си страни, така че ще търсим S. Ще казваме, че важният триъгълник τ е *базов*, ако страните му са успоредни на тези на триъгълника със страна n и е със същата ориентация. Всеки важен триъгълник τ може да се потопи в единствен базов триъгълник $f(\tau)$, чиито страни минават през върховете на τ. Ако страната на базов триъгълник е равна на $k\in\{1,\ldots,n\}$ (броят на тези базови триъгълници е $1+2+\cdots+(n+1-k)=\binom{n+2-k}{2}$), то той е равен на $f(\tau)$ за k различни τ (по един за всеки от възлите в основата на $f(\tau)$ без най-десния). Следователно

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n+2-k}{2}=\binom{n+3}{4}.$$

Можем да се уверим в последното равенство така: $\binom{n+3}{4}$ е броят на всички думи с 4 „А“ и $n-1$ „Б“. Ако между крайните „А“ има $n+2-k$ букви ($k\in\{1;\ldots;n\}$), то за местата на крайните „А“ има k варианта, при всеки от които за местата на средните „А“ има $\binom{n+2-k}{2}$ варианта.

(Алтернативно, използвайте без доказателство известните формули $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. При използването на други формули за суми следва те да бъдат доказвани.) Окончателно

$$p_1 + 2p_2 = 3S = 3\binom{n+3}{4} = \frac{1}{8}(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n).$$

Коментар. От а) и б) следва $p_2 - p_0 = (p_1 + 2p_2) - (p_0 + p_1 + p_2) = 0$, т.е. $p_0 = p_2$. Не ни е известно директно комбинаторно доказателство (напр. със съответствие между двойките от единия тип и двойките от другия) на този факт.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за а), от които 1 т. за пресмятане на броя двойки възли и 1 т. за обосновка защо това е търсеният; 5 т. за б), от които 1 т. за свеждане до пресмятане на S, 2 т. за съответствието между $\binom{n+2-k}{2}$ базови триъгълника и k важни за всяко k и 2 т. за пресмятане на $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n+2-k}{2}$.