Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

Задача 9.1. Да се реши в реални числа системата

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ x^2y + xy^2 = 2. \end{vmatrix}$$

Задача 9.2. Даден е остроъгълен разностранен триъгълник ABC с височини AE и BD. Върху правата AC са взети точки G и M, такива че $AE = AG = AM$ и C, G, A, M лежат в този ред. Върху правата BC са взети точки F и L, такива че $BD = BF = BL$ и C, F, B, L лежат в този ред. Нека P е средата на DE. Да се докаже, че перпендикулярът от P към AB и правите EM и DL се пресичат в една точка.

Задача 9.3. Едно естествено число наричаме *свободно от квадрати*, ако не се дели на квадрата на никое просто число.
За естествено число a разглеждаме числото $f(a) = a^{a+1} + 1$. Докажете, че:

а) ако a е четно, то $f(a)$ не е свободно от квадрати.

б) съществуват безбройно много нечетни a, за които $f(a)$ не е свободно от квадрати.

Задача 9.4. *Обобщен $2n$-успоредник* ще наричаме изпъкнал многоъгълник с $2n$ страни, така че, обхождани последователно, k-тата страна е успоредна и равна на $(n+k)$-тата страна за $k = 1, 2, \ldots, n$.
В правоъгълна координатна система е даден обобщен успоредник с 50 върха, всеки с целочислени координати. Да се докаже, че лицето му е поне 300.