Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се реши в реални числа системата

$$\left| \begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{x} & + & \dfrac{1}{y} & = & 2 \\ & & & & \\ x^2y & + & xy^2 & = & 2. \end{array} \right.$$

Решение. Полагаме $p = x + y$, $q = xy$, с което системата добива вида

$$\left| \begin{array}{ccc} \dfrac{p}{q} & = & 2 \\ pq & = & 2. \end{array} \right.$$

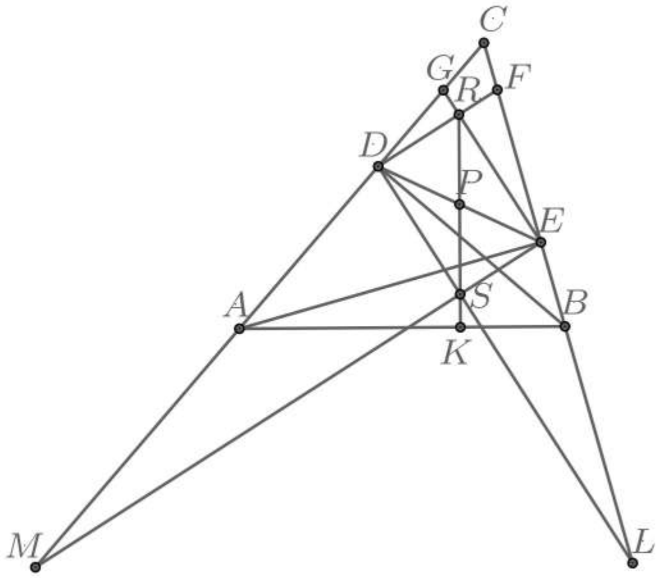
Да отбележим, че x и y са корени на квадратното уравнение $t^2 - pt + q = 0$. Умножавайки двете уравнения от последната система, получаваме $p^2 = 4$, следователно $p \in \{\pm 2\}$. При $p = 2$ имаме $q = 1$ и значи x, y са корени на уравнението $t^2 - 2t + 1 = 0$, т. е. $x = y = 1$. При $p = -2$ и $q = -1$ квадратното уравнение е $t^2 + 2t - 1 = 0$ и има корени $\{x, y\} = \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$. Окончателно всички решения на системата са

$$(x; y) = (1; 1),\ (-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}),\ (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}).$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за полагането; 2 т. за случая $p = 2$; 2 т. за случая $p = -2$.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен разностранен триъгълник ABC с височини AE и BD. Върху правата AC са взети точки G и M, такива че $AE = AG = AM$ и C, G, A, M лежат в този ред. Върху правата BC са взети точки F и L, такива че $BD = BF = BL$ и C, F, B, L лежат в този ред. Нека P е средата на DE. Да се докаже, че перпендикулярът от P към AB и правите EM и DL се пресичат в една точка.

Решение.



Използваме стандартните означения α, β, γ за ъглите на ABC. Нека означим $R = DF \cap GE$ и $S = ME \cap DL$. Можем да намерим, че $\angle DEG = \angle AEG - \angle AED = 45 + \frac{\gamma}{2} - (90 - \alpha) = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 45$ и $\angle EDF = \beta + \frac{\gamma}{2} - 45$, откъдето $\angle DRE = 90$. С подобно изразяване намираме $\angle SDE = \angle SDB + \angle BDE = 45 - \frac{\gamma}{2} + 90 - \beta = 135 - \beta - \frac{\gamma}{2} = \angle DEG$, $\angle SED = 135 - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \angle BDF$ и $\angle DSE = 90$. Оттук лесно получаваме, че $\angle SDR = \angle SER = 90$, следователно $DRES$ е правоъгълник и значи P лежи на отсечката RS.

Накрая ако означим с K пресечната точка на AB и RS, то с изразяване на ъгли в четириъгълника $BKRE$ намираме

$$\angle KRE + \angle REB + \angle EBK = 135 - \beta - \frac{\gamma}{2} + (45 + \frac{\gamma}{2} + 90) + \beta = 270,$$

следователно $\angle RKB = 90$ и значи $RS \perp AB$. Тогава перпендикулярът от P към AB съвпада с правата RS, с което завършваме доказателството.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за получаване на $\angle DRE = 90^\circ$ или $\angle DSE = 90^\circ$; 1 т. за обосновка на $\angle SDR = \angle SER = 90^\circ$ и извод, че $DSER$ е правоъгълник; 1 т. за извод, че P лежи на RS; 2 т. за доказване, че $RS \perp AB$; 1 т. за завършване. При липса на което и да е от горните се дава 1 т. за доказване, че $DGFE$ или $DELM$ е вписан четириъгълник.

Задача 9.3. Едно естествено число наричаме *свободно от квадрати*, ако не се дели на квадрата на никое просто число.
За естествено число a разглеждаме числото $f(a) = a^{a+1} + 1$. Докажете, че:

а) ако a е четно, то $f(a)$ не е свободно от квадрати.
б) съществуват безбройно много нечетни a, за които $f(a)$ не е свободно от квадрати.

Решение. а) Нека p е просто число, което дели $a + 1$ (такова има, тъй като $a + 1 > 1$). Понеже $a + 1$ е нечетно, то можем да разложим

$$a^{a+1} + 1 = (a + 1)(a^a - a^{a-1} + \cdots - a + 1).$$

Сега е ясно, че $a^a - a^{a-1} + \cdots - a + 1 \equiv (-1)^a - (-1)^{a-1} + \cdots - (-1) + 1 \equiv a + 1 \equiv 0 \pmod p$ и значи $p^2 \mid a^{a+1} + 1$.
б) *Първи метод.* Да забележим, че ако $p \mid a^{a+1} + 1 = (a^{\frac{a+1}{2}})^2 + 1$, то $p \equiv 1 \pmod 4$. При фиксиран избор на такова p ще построим нечетно a, за което $p^2 \mid a^{a+1} + 1$. Понеже простите числа от вида $4k + 1$ са безбройно много и всяко число $a^{a+1} + 1$ има краен брой прости делители, това е достатъчно, за да докажем твърдението.
И така, нека $p \equiv 1 \pmod 4$ е фиксирано. Ако намерим a, за което $p^2 \mid a^2 + 1$ и $a \equiv 1 \pmod 4$, то a ще е нечетно и $p^2 \mid a^2 + 1 \mid (a^2)^{\frac{a+1}{2}} + 1 = a^{a+1} + 1$. За целта първо намираме естествено число x, за което $p \mid x^2 + 1$ (например $x = (\frac{p-1}{2})!$). След това разглеждаме числата

$$x^2 + 1, \ \ (x + p)^2 + 1, \ \ (x + 2p)^2 + 1, \ldots, \ \ (x + (p - 1)p)^2 + 1, \qquad (*)$$

всяко от които се дели на p. Ако допуснем, че за някои $k, \ell \in \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ с $k \neq \ell$ е изпълнено

$$(x + kp)^2 + 1 \equiv (x + \ell p)^2 + 1 \pmod{p^2}$$

ще получим $2xkp \equiv 2x\ell p \pmod{p^2}$ и съответно $k \equiv \ell \pmod p$, което е невъзможно. Това означава, че числата в $(*)$ са сравними в някакъв ред с $p, 2p, 3p, \ldots, (p-1)p, p^2$ при деление на p^2, в частност някое от тях се дели на p^2 и нека го означим с $y^2 + 1$. Накрая нека z е числото измежду $y, y + p^2, y + 2p^2, y + 3p^2$, което изпълнява $z \equiv 1 \pmod 4$. Ясно е, че $z^2 + 1 \equiv y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$, с което доказателството е завършено.
Втори метод. (Мирослав Маринов, Божидар Димитров) Достатъчно е да докажем, че за безбройно много нечетни a числото $a^{a+1} + 1$ се дели на 25. Да забележим, че ако a_0 върши работа, то $100k + a_0$ също върши работа за всяко цяло неотрицателно k, понеже $(100k + a_0)^{100k+a_0+1} + 1 \equiv a_0^{100k+a_0+1} + 1 \equiv a_0^{a_0+1} + 1 \pmod{25}$ от теоремата на Ойлер.
И така, задачата се свежда до това да намерим някое нечетно a_0, за което $25 \mid a_0^{a_0+1} + 1$. Еквивалентно, $25 \mid a_0^{a_0+1} - 49 = \left(a_0^{\frac{a_0+1}{2}} + 7\right)\left(a_0^{\frac{a_0+1}{2}} - 7\right)$. Взимайки предвид $7^4 \equiv 1 \pmod{25}$, сега е достатъчно да изберем например $a_0 \equiv 7 \pmod{25}$ с $\frac{a_0+1}{2} \equiv 1 \pmod 4$, т.е. $a_0 = 57$. (Друга възможност е $a_0 \equiv -7 \pmod{25}$ с $\frac{a_0+1}{2} \equiv 3 \pmod 4$, т.е. $a_0 = 93$.)

Оценяване. (7 точки) а) 2 т. за правилна конструкция; б) *Първи метод:* 1 т. за идея при фиксирано p да търсим подходящо a; 3 т. за $p^2 \mid y^2 + 1$; 1 т. за $z \equiv 1 \pmod 4$. *Втори метод:* 1 т. за идея при определено p да търсим подходящи a; 4 т. за правилна конструкция.

Задача 9.4. *Обобщен $2n$-успоредник* ще наричаме изпъкнал многоъгълник с $2n$ страни, така че, обхождани последователно, k-тата страна е успоредна и равна на $(n+k)$-тата страна за $k = 1, 2, \ldots, n$.

В правоъгълна координатна система е даден обобщен успоредник с 50 върха, всеки с целочислени координати. Да се докаже, че лицето му е поне 300.

Решение. Ще докажем по индукция, че лицето на един обобщен успоредник $A_1A_2\ldots A_{2n}$ е равно на сумата от лицата на всички успоредници от вида $MNOP$, където $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ и $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{A_jA_{j+1}}$ за $1 \leq i < j \leq n$.

Базовата стъпка се проверява лесно. Да допуснем, че твърдението е вярно за всички обобщени $(2n-2)$-успоредници и нека разгледаме един обобщен $2n$-успоредник $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Имаме $\overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}} = -\overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{v}$.

Да транслираме точките $A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{2n-1}$ с $\overrightarrow{v}$. Получаваме нови точки $A'_n, A'_{n+1}, \ldots, A'_{2n-1}$, за които $A'_n = A_{n-1}$ и $A'_{2n-1} = A_{2n}$. Ясно е, че фигурата $A_1A_2\ldots A_{n-1}A'_{n+1}\ldots A'_{2n-1}$ е обобщен $(2n-2)$-успоредник и за него е изпълнена индукционната хипотеза. Останалата част от първоначалния $2n$-успоредник $A_1A_2\ldots A_{2n}$ е съставена точно от успоредниците $A_{n+k}A_{n+k+1}A'_{n+k+1}A'_{n+k}$ за $0 \leq k \leq n-2$, всеки от които има страна $A_{n+k}A'_{n+k}$, успоредна на $A_{n-1}A_n$. Тогава общият брой успоредници, съставящи $A_1A_2\ldots A_{2n}$, е точно $\binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n}{2}$, с което индукционната стъпка е завършена.

Накрая да забележим, че лицето на успоредник, чиито върхове имат целочислени координати, е поне 1 (например чрез формулата на Пик). Понеже лицето на обобщен $2n$-успоредник е равно на сбора от лицата на $\binom{n}{2}$ успоредници, които го съставят, то неговото лице е поне $\binom{n}{2}$. За $n = 25$ имаме $\binom{25}{2} = 300$, с което задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за индукция по броя на страните на обобщен успоредник; 2 т. за трансформацията на $2n-2$-ъгълник в $2n$-ъгълник и обратно чрез транслация; 3 т. за довършване на индукцията или общо 6 т. за друго доказателство на същото твърдение; 1 т. за завършване.

Коментар. Формулата за лице на обобщения успоредник няма нужда от целочисленост на координатите. Формулата на Пик може да се използва свободно без доказателство, както и общата формула за лице на изпъкнал многоъгълник чрез декартовите координати на страните му. Доказаната граница е класическа, но не е много точна. Има различни други граници свързани със задачата за минимално лице на многоъгълници с целочислени координати, както и редица отворени проблеми.