Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Първи кръг, Тема за 6 – 7 клас

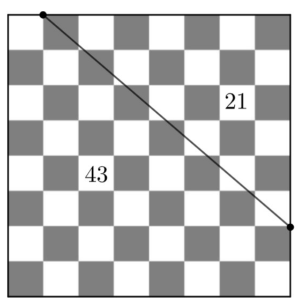
Задача 1. Хари Потър и Рон Уизли се упражнявали да правят бонбонени магии. След всяка такава магия се получава бонбон във вид на шоколадова жаба, всякаквовкусово бобче или лакрицова пръчка. Двамата направили общо 444 магии и спрели. Всеки разгледал своите бонбони. Рон казал:

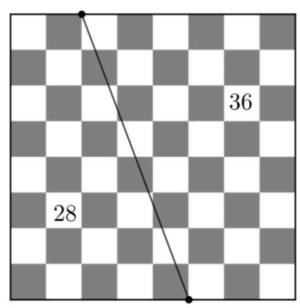
– Сред моите бонбони 30% са жаби, а 25% са бобчета!

– А сред моите $\frac{1}{6}$ са жаби, а $\frac{4}{9}$ – бобчета. – отговорил Хари. – Но ти имаш повече лакрицови пръчки от мен.

Колко лакрицови пръчки са направили двамата общо?

Задача 2. Дадена е шахматна дъска със страна на малките квадратчета, равна на 1. Избирам два върха на квадратчета по границата на дъската така, че отсечката, която ги свързва, да разделя дъската на две части, и пресмятам лицата на тези части. Две такива разделяния със съответните лица са показани на чертежа.





Колко различни стойности може да приема лицето на една така получена част?

Задача 3. Петко, Галин, Мария и Иво решавали следната задача.

> Намислих трицифрено число A, всички цифри на което са различни от 0. Изтрих една цифра на A и получих двуцифреното число B. След това изтрих една цифра на B и получих едноцифреното число C. Оказа се, че $A + B + C = 765$. Кое число съм намислил?

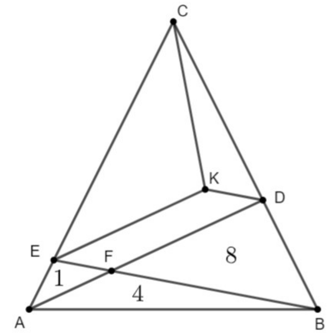
Всеки от четиримата получил различно число, което удовлетворява условието. Ако числото на Мария се дели на простото число p, числото на Иво се дели на $p + 10$ и на простото число q, а числото на Петко се дели на $q + 10$, кое число е получил Галин?

Задача 4. Велосипедист се движил по маршрута $A \to B \to C \to D$, като разстоянието от B до C е с 9 km по-голямо от разстоянието от A до B и с 9 km по-малко от разстоянието от C до D.

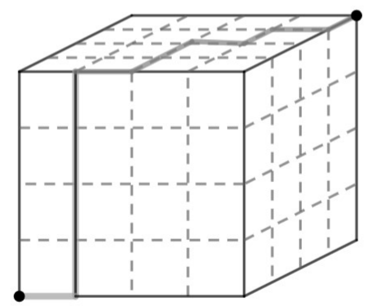
Велосипедистът пътувал с постоянна скорост от A към B, след което увеличил скоростта си с 20% и продължил от B към C, а от C към D отново увеличил скоростта си с 20%. По този начин той пътувал от A до C с 20% по-дълго, отколкото от C до D.

Колко километра е разстоянието от A до D?

Задача 5. Даден е триъгълникът ABC. Точките D и E са съответно на страните BC и CA, а AD пресича BE в точката F.
Лицата на триъгълниците AEF, ABF и BDF са съответно $1\ \text{cm}^2$, $4\ \text{cm}^2$ и $8\ \text{cm}^2$. Ако $EFDK$ е успоредник, намерете лицата на триъгълнците EKC и KDC.



Задача 6. Всяка стена на куб с ръб 4 е покрита с мрежа от квадратчета със страна 1. Мравка се намира в един връх на куба и иска да допълзи до срещуположния връх, като се движи само по линиите на мрежата. Измежду колко различни маршрута с дължина 12 може да избира мравката?



Задача 7. Естествените числа a, b, c изпълняват следните условия:

(1) $a \cdot b$ се дели на $2^{14} \cdot 7^{10}$;
(2) $b \cdot c$ се дели на $2^{17} \cdot 7^{17}$;
(3) $a \cdot c$ се дели на $2^{20} \cdot 7^{37}$.

Най-малко на колко е равно произведението $a \cdot b \cdot c$?

Задача 8. Квадрат със страна n ще наричаме *специален*, ако може да се разреже на n квадрата с целочислени дължини на страните.
а) Докажете, че всеки квадрат с дължина на страната четно и по-голямо от 4 число е специален.
б) Намерете най-малкото нечетно $n > 1$, за което квадратът със страна n е специален.