Тринадесети фестивал на младите математици
Созопол, 2024 г.
Трети кръг, Тема за 6 – 7 клас

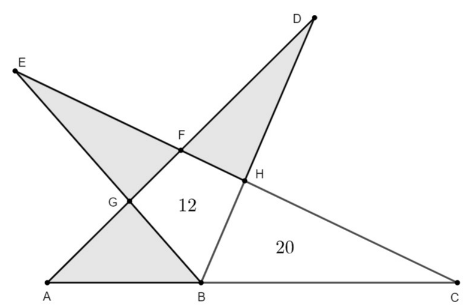
Задача 1. Хари Потър се возел в Рицарския автобус и забелязал, че $\frac{2}{3}$ от пътниците в автобуса са седнали, а останалите са правостоящи; при това 25% от седалките в автобуса са свободни.

На следващата спирка слезли $\frac{1}{3}$ от седящите и $\frac{2}{3}$ от правостоящите пътници, а се качили 15 магьосници, някои от които седнали. Когато автобусът потеглил, Хари забелязал, че 20% от пътниците са правостоящи.

След това автобусът спрял на Диагон Али и слязъл само Хари Потър, като отбелязал, че остават 2 пъти повече свободни места, отколкото правостоящи пътници в автобуса.

Прав или седнал е пътувал Хари Потър и колко пътници са останали в автобуса, когато той е слязъл?

Задача 2. На чертежа точките A, B и C лежат на една права, AD пресича BE и CE съответно в точките G и F, а BD и EC се пресичат в точка H. Триъгълниците ABG, EFG и DHF имат едно и също лице S, лицето на триъгълника BCH е 20 cm^2, а лицето на $GBHF$ е 12 cm^2.
Намерете S.



Задача 3. На дъската е записано естествено число n. Андрей и Боян, редувайки се, играят следната игра (първи е Андрей). Андрей има право да изтрие текущото число k и да запише или числото $3k-1$, или числото $6k+2$. На своя ход Боян има право да умножи написаното число по 3 или по 7. Докажете, че няма момент в играта, в който някой от двамата играчи да запише на дъската точен квадрат на естествено число.

Задача 4. Да се намери най-голямото естествено число с различни ненулеви цифри, за което е вярно, че всяка цифра, освен първите две, дели числото, образувано от предишните две цифри.

Задача 5. Дадени са дробите $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{19}$. Най-малко колко от дадените дроби трябва да задраскаме, така че да не съществува рационално число, което може да се запише като сбор на различни дроби (може и една) от незадрасканите по два различни начина?

Задача 6. Във всяко единично квадратче на квадрат 4×4 е начертан по случаен начин един от двата диагонала. Каква е вероятността да е възможно получените 32 триъгълника да се оцветят шахматно (т.е. да се оцветят в черно или бяло така, че всеки два триъгълника с обща страна да са разноцветни)?

Задача 7. Намерете броя на четворките естествени числа (a, b, c, d), за които

$$12a + 21b + 28c + 84d = 2024.$$

Задача 8. Дворът на четиримата братя има форма на правоъгълник $ABCD$, $AB = 100$ m и $AD = 120$ m. В двора расте златна ябълка, разположена в точка P, за която триъгълниците PAC и PBD имат лица съответно 100 m^2 и 120 m^2.

Четиримата братя си разделили градината, като всеки взел един от триъгълните участъци ABP, BCP, CDP, DAP. Най-малкият брат взел ABP.

а) Колко квадратни метра може да е площта на участъка на най-малкия брат? Намерете всички възможности.

б) Всеки от братята отглежда в градината си поне една билка: трима отглеждат змийско грозде и двама отглеждат змийско мляко.

Най-малкият брат гледа и двете билки.

Градината на Вичо няма обща страна с градината на Дичо.

И двамата съседи на Вичо гледат змийско грозде.

Змийско мляко има само в две съседни (с обща страна) градини.

Ачо отглежда само змийско грозде.

Градината на Ичо е със 100 m^2 по-голяма от градината на Дичо.

В най-малката градина се отглежда змийско мляко.

Как се казва най-малкият брат и колко е площта на градината му?