Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Трети кръг, Тема за 6 – 7 клас

Задача 1. Хари Потър се возел в Рицарския автобус и забелязал, че $\dfrac{2}{3}$ от пътниците в автобуса са седнали, а останалите са правостоящи; при това 25% от седалките в автобуса са свободни.

На следващата спирка слезли $\dfrac{1}{3}$ от седящите и $\dfrac{2}{3}$ от правостоящите пътници, а се качили 15 магьосници, някои от които седнали. Когато автобусът потеглил, Хари забелязал, че 20% от пътниците са правостоящи.

След това автобусът спрял на Диагон Али и слязъл само Хари Потър, като отбелязал, че остават 2 пъти повече свободни места, отколкото правостоящи пътници в автобуса.

Прав или седнал е пътувал Хари Потър и колко пътници са останали в автобуса, когато той е слязъл?

Отговор. 54.

Решение. Нека седалките в автобуса са x, а в началото на пътуването имало y пътници; x и y са естествени чсила.

Седналите пътници са $\dfrac{2}{3}y$ и са колкото заетите седалки, т.е. $\dfrac{3}{4}x$. Тогава

$$\frac{2}{3}y = \frac{3}{4}x \iff 8y = 9x,$$

следователно y се дели на 9 и може да запишем $y = 9a$, където a е естествено число; оттук $x = 8a$.

Да проследим движението на пътниците. Първоначалнно са седнали $\dfrac{2}{3}\cdot 9a = 6a$ пътници, а $3a$ пътници са прави. След това са слезли $\dfrac{1}{3}\cdot 6a = 2a$ седнали и $\dfrac{2}{3}\cdot 3a = 2a$ правостоящи пътници. Останали са $4a$ седнали и a правостоящи. Качили са се 15 магьосници и нека от тях b са седнали, а c са останали прави; $b + c = 15$. От

$$20\%(5a + 15) = a + c \iff c = 3$$

следва, че преди Диагон Али е имало $4a+12$ седнали и $a+3$ правостоящи пътници. Свободните места в автобуса са били $8a - (4a + 12) = 4a - 12$.

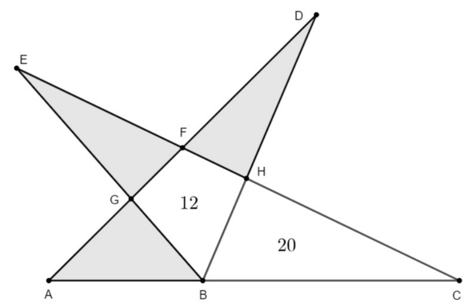
Ако Хари е пътувал седнал, като е слязъл, свободните места са станали $4a-12+1 = 4a-11$ и $4a-11 = 2(a+3)$, което от съображения за четност е невъзможно.

Значи Хари е пътувал прав; като е слязъл, са останали $a+2$ правостоящи и $4a - 12 = 2(a + 2) \iff a = 8$.

Когато Хари е слязъл, са останали $5a + 14 = 54$ пътници.

Оценяване. За получаване на $8y = 9x$ – 3 т.; за $c = 3$ – 4 т.; за $a = 8$ – 4 т.; за отговор – 1 т.

Задача 2. На чертежа точките A, B и C лежат на една права, AD пресича BE и CE съответно в точките G и F, а BD и EC се пресичат в точка H.
Триъгълниците ABG, EFG и DHF имат едно и също лице S, лицето на триъгълника BCH е 20 cm^2, а лицето на $GBHF$ е 12 cm^2.
Намерете S.



Отговор. 9,6 cm^2

Решение. Първо ще докажем, че CG разполовява лицето на $BCFG$. Нека $S_{BCG} = x$, $S_{FCG} = y$, $S_{AGE} = z$. От

$$\frac{S_{AGC}}{S_{GFC}} = \frac{AG}{GF} = \frac{S_{AGE}}{S_{GFE}} \Longrightarrow \frac{S+x}{y} = \frac{z}{S}$$

и

$$\frac{S_{AEG}}{S_{AGB}} = \frac{EG}{GB} = \frac{S_{CGE}}{S_{CGB}} \Longrightarrow \frac{z}{S} = \frac{S+y}{x}$$

следва, че

$$\frac{S+x}{y} = \frac{S+y}{x}.$$

Това равенство е възможно, само ако $x = y$ (ако $x > y$, то $\dfrac{S+x}{y} > \dfrac{S+y}{x}$, а ако $x < y$, то $\dfrac{S+x}{y} < \dfrac{S+y}{x}$).

Следователно $S_{GFC} = \dfrac{12+20}{2} = 16$. Аналогично BF разполовява лицето на $BGFH$, т.е. $S_{BGF} = S_{BHF} = \dfrac{12}{2} = 6$.

Тогава от

$$S_{GEF} : S_{GFC} = EF : FC = S_{BEF} : S_{BFC}$$

получаваме

$$S : 16 = (S+6) : (6+20) \iff 26S = 16(S+6) \iff S = 9{,}6.$$

Оценяване. За доказване на $x = y$ – 6 т.; за довършване – 6 т.

Задача 3. На дъската е записано естествено число n. Андрей и Боян, редувайки се, играят следната игра (първи е Андрей). Андрей има право да изтрие текущото число k и да запише или числото $3k-1$, или числото $6k+2$. На своя ход Боян има право да умножи написаното число по 3 или по 7. Докажете, че няма момент в играта, в който някой от двамата играчи да запише на дъската точен квадрат на естествено число.

Решение. Всеки точен квадрат дава остатък 0 или 1 при деление на 3. Обаче след всеки ход на Андрей записаното число дава остатък 2 при деление на 3. Ако Боян умножи полученото от Андрей число по 7, то остатъкът 2 ще се запази, а ако избере да умножи числото по 3, тогава полученият резултат ще се дели в действителност на 3, но не и на 9. Следователно нито след ход на Андрей, нито след ход на Боян е възможно да се получи точен квадрат.

Оценяване. Разглеждане на записаните числа по модул 3 – 1 т.; точните квадрати дават остатък 0 или 1 при деление на 3 – 1 т.; за това, че след ход на Андрей числото не е точен квадрат – 4 т.; че след ход на Боян не се получава точен квадрат – 6 т.

Задача 4. Да се намери най-голямото естествено число с различни ненулеви цифри, за което е вярно, че всяка цифра, освен първите две, дели числото, образувано от предишните две цифри.

Отговор. 96842731.

Решение. Да допуснем, че числото може да е деветцифрено. Първо можем да забележим, че понеже 0 не участва, 5 трябва да е на първа позиция или втора позиция, защото иначе 5 ще трябва да дели двуцифреното число вляво от себе си и то ще трябва да завършва на друга цифра 5. Ако 5 е на втора позиция, това ще онзачава, че никоя от следващите цифри няма да може да бъде четна, защото ще трябва да дели нечетно число. Следователно 5 трябва да е на първо място. По същата причина, след 5 трябва да се поместят всички четни цифри, защото след нова нечетна цифра може да допълним само с нечетни. Възможните конфигурации са $52486, 56482, 56842$. Пред 9 трябва да стои число с една четна и една нечетна цифра, следователно 9 трябва да е на седма позиция. Това може да стане само 5684279, но после може да сложим само 1. Следователно, числото не може да е деветцифрено.

От осемцифрените слагаме 9 на първа позиция. От разсъжденията по-горе следва, че няма да използваме цифрата 5, но тогава отново трябва да подредим всички четни цифри най-напред и след това нечетните. Ако пробваме с 8 на второ място, след 98 трябва да стои 2, но след 82 не може да сложим нито 6, нито 4. Следователно, слагаме 6 на второ място и 8 на трето, 4 на четвърто и 2 на пето място и цифрите $7, 3, 1$ в този ред, за да е възможно най-голямо и получаваме 96842731.

Оценяване. Доказателство, че 5 не участва – 3 т.; намиране на числото – 9 т. Друго пълно решение с изчерпване на възможности – 12 т.

Задача 5. Дадени са дробите $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{19}$. Най-малко колко от дадените дроби трябва да задраскаме, така че да не съществува рационално число, което може да се запише като сбор на различни дроби (може и една) от незадрасканите по два различни начина?

Отговор. 4.

Решение.

*Пример.*Премахваме $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{18}, \frac{1}{6}$.

Да допуснем, че $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_m}$ за някои от останалите дроби. Ако съществува просто число p, което дели само един от знаменалите, например x_1, тогава умножавайки израза с $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_m$, ще получим, че $x_1 | x_2 \cdot x_3 \cdots y_m$, което е невъзможно. Тогава за всяко просто число трябва да е изпълнено, че поне два от знаменателите са кратни на него. Следователно в равенството не може да участват $\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}$. Ако допуснем, че $\frac{1}{7}$ участва, тогава и $\frac{1}{14}$ трябва да участва. БОО $x_1 = 7$ и $x_2 = 14$ или $y_1 = 14$. В първия случай $\frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$ и тогава $\frac{3}{14}$ остава единствената дроб в израза, чийто знаменател е кратен на 7, и по аналогичен аргумент получаваме противоречие. За втория случай пък $\frac{1}{7} - \frac{1}{14} = \frac{1}{14}$ и отново в израза остава само една дроб със знаменател, кратен на 7. По аналогичен начин получаваме противоречие, ако използваме $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$. От останалите възможни знаменатели кратните на 3 са 9 и 12. Ако са използвани, отново $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{36}$ и $\frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{36}$, което означава, че отново остава дроб със знаменател, кратен на 3. Следователно, единствените възможни използвани дроби са $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$. Тогава, ако БОО x_1 е най-големият знаменател, тогава умножавайки израза с x_1, ще получим противоречие по модул 2.

Оценка. Да допуснем, че може да задраскаме 3 или по-малко дроби, така че условието на задачата да е изпълнено. Да разгледаме равенствата

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6},\ \ \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3},\ \ \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18},\ \ \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{2}.$$

Ако не задраскаме $\frac{1}{6}$, трябва да задраскаме поне една дроб от $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, заради второто равенство, поне една от $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{18}$, заради четвъртото равенство. Тогава измежду $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$ може да има най-много една задраскана. Това е невъзможно заради първото, третото и петото равенство. Следователно, $\frac{1}{6}$ трябва да е задраскана. Оттам, ако не задраскаме нито $\frac{1}{2}$, нито $\frac{1}{3}$, трябва да задраскаме една от $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$ заради третото равенство, една от $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ заради първото и второто равенство, една от $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{18}$ заради първото и четвъртото равенство- противоречие. Ако $\frac{1}{2}$ бъде задраскана, тогава остава само една възможна дроб за задраскване, което е противоречие заради третото и шестото равенство. Ако $\frac{1}{3}$ бъде задраскана, тогава само една от дробите $\frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}$ може да бъде задраскана, което е противоречие заради седмото и осмото равенство.

Оценяване. Оценка – 5 т; пример – 7 т.

Задача 6. Във всяко единично квадратче на квадрат 4×4 е начертан един от двата диагонала. Каква е вероятността да е възможно получените 32 триъгълника да се оцветят шахматно (т.е. да се оцветят в черно или бяло така, че всеки два триъгълника с обща страна да са разноцветни)?

Отговор. $\frac{1}{512}$

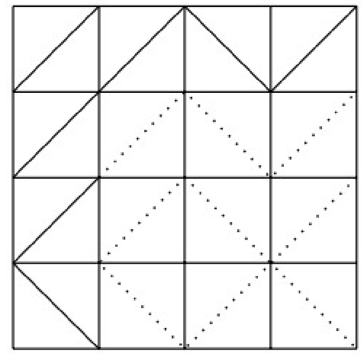
Решение. За всяко малко квадратче по 2 начина може да се избере кой диагонал да се построи, следователно изборът на 16-те диагонала става по 2^{16} начина.

Шахматно оцветяване на получените 32 триъгълника е възможно само когато всеки връх на квадратче, вътрешен за дадения квадрат 4×4, е край на четен брой отсечки (т.е. е четен). Наистина, ако такъв връх е край на нечетен брой отсечки, то има нечетен брой триъгълници около този връх и не е възможно да се оцветят шахматно.

От друга страна, ако всеки вътрешен връх е четен, шахматно оцветяване винаги е възможно.

Остава да преброим по колко начина могат да се построят диагоналите така, че всички вътрешни върхове да са четни.

Ако по произволен начин се построят диагоналите в квадратчетата от левия стълб и горния ред, във всяко следващо квадратче еднозначно се определя кой диагонал да се построи така, че горният му ляв връх да е четен (като се започне от квадратчето (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3) и накрая (4, 4)).



Изборът на диагоналите в 7 квадратчета става по 2^7 начина, всеки от които еднозначно определя конфигурация с шахматно оцветяване. Търсената вероятност е $\dfrac{2^7}{2^{16}} = \dfrac{1}{2^9}$.

Оценяване. Определяне на броя на всички възможности да се построят диагонали – 1 т.

Доказателство, че всеки вътрешен връх има четна степен – 3 т.

Доказателство, че ред и стълб определят конфигурацията – 6 т.

Намиране на вероятността – 2 т.

Задача 7. Намерете броя на четворките естествени числа (a, b, c, d), за които

$$12a + 21b + 28c + 84d = 2024.$$

Отговор. 2024

Решение. От делимост на 4 следва, че b се дели на 4; $b = 4b_1$.

От делимост на 3 следва, че $c \equiv 2 \pmod 3$, $c = 3c_1 + 2$.

От делимост на 7 следва, че $5a \equiv 1 \pmod 7 \iff a \equiv 3 \pmod 7$, $a = 7a_1 + 3$.

Като заместим в даденото равенство, получаваме

$$84a_1+84b_1+84c_1+84d = 2024-3.12-2.28 = 1932 \iff a_1+b_1+c_1+d = 23.$$

Тъй като a, b, c, d са естествени числа, то събираемите a_1 и c_1 са естествени или 0, а b_1 и d са естествени. Ако запишем $a_1 = a_2 - 1$ и $c_1 = c_2 - 1$, получаваме

$$a_2 + b_1 + c_2 + d = 25,$$

където всички събираеми са естествени числа.

Броят на начините да се изберат такива четворки събираеми със сбор 25 се намира стандартно. Поставяме 25 точки в редица и три прегради някъде в 24-те интервала, определени от точките. Броят на точките до първата преграда съответства на първото събираемо, броят на точките между първата и втората – на второто и т.н. Броят на начините да се поставят тези 3 прегради е $\dfrac{24.23.22}{3.2.1} = 2024$.

Оценяване. За доказване на $b = 4b_1$, $c = 3c_1 + 2$ и $a = 7a_1 + 3$ – по 1 т. За получаване на $a_1 + b_1 + c_1 + d = 23$ – 2 т.

За намиране на броя на решенията – 7 т.

Задача 8. Дворът на четиримата братя има форма на правоъгълник $ABCD$, $AB = 100$ m и $AD = 120$ m. В двора расте златна ябълка, разположена в точка P, за която триъгълниците PAC и PBD имат лица съответно 100 m^2 и 120 m^2.

Четиримата братя си разделили градината, като всеки взел един от триъгълните участъци ABP, BCP, CDP, DAP. Най-малкият брат взел ABP.

а) Колко квадратни метра може да е площта на участъка на най-малкия брат? Намерете всички възможности.

б) Всеки от братята отглежда в градината си поне една билка: трима отглеждат змийско грозде и двама отглеждат змийско мляко.

Най-малкият брат гледа и двете билки.

Градината на Вичо няма обща страна с градината на Дичо.

И двамата съседи на Вичо гледат змийско грозде.

Змийско мляко има само в две съседни (с обща страна) градини.

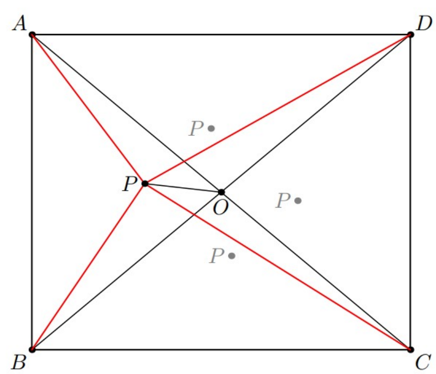
Ачо отглежда само змийско грозде.

Градината на Ичо е със 100 m^2 по-голяма от градината на Дичо.

В най-малката градина се отглежда змийско мляко.

Как се казва най-малкият брат и колко е площта на градината му?

Решение. а) Точката P може да е във всеки от триъгълниците AOB, BOC, COD, DOA.
Тъй като PO е медиана във всеки от триъгълниците ACP и BDP, то лицето на AOP и на COP е 50 m^2, а лицето на BOP и на DOP е 60 m^2.



Ако P е вътрешна за AOB, то

$$S_{PAB} = S_{AOB} - S_{PAO} - S_{PBO} = 3000 - 50 - 60 = 2890.$$

Ако P е вътрешна за COD, то

$$S_{PAB} = S_{AOB} + S_{PAO} + S_{PBO} = 3000 + 50 + 60 = 3110.$$

Ако P е вътрешна за BOC, то

$$S_{PAB} = S_{AOB} - S_{PAO} + S_{PBO} = 3000 - 50 + 60 = 3010.$$

Ако P е вътрешна за DOA, то

$$S_{PAB} = S_{AOB} - S_{PAO} - S_{PBO} = 3000 + 50 - 60 = 2990.$$

б) Градините на братята са с площ 2890, 2990, 3010, 3110, като общата площ на срещуположните градини е 6000.

Тъй като градината на Ичо е със 100 m^2 по-голяма от градината на Дичо и градините на Вичо и Дичо са срещуположни, има две възможности:

1) Ичо – 3110, Дичо – 3010, Ачо – 2890, Вичо – 2990

2) Ичо – 2990, Дичо – 2890, Ачо – 3010, Вичо – 3110.

Първият случай отпада, тъй като в най-малката градина, в случая на Ачо, се отглежда змийско мляко, но Ачо отглежда само змийско грозде; противоречие.

Във втория случай най-малката градина е на Дичо, той гледа змийско мляко, както и съседът му Ичо.

И двамата съседи на Вичо, Ачо и Ичо, гледат змийско грозде.

Следователно Ичо гледа и двете билки, той е най-малкият брат и има градина от 2990 m^2.

Оценяване. а) Прилагане на свойството на медианата – 1 т.; за всеки от възможните 4 случая – по 1 т.

б) 7 точки.