Тринадесети фестивал на младите математици
Созопол, 2024 г.
Четвърти кръг, Тема за 6 – 7 клас

Задача 1. Учебната година в училището за магьосници Хогуортс завършва с три изпита: по аритмантика, геомагика и комбигурация. На изпитите се явили 2024 магьосници и всеки взел поне един изпит.

Оказало се, че всеки изпит е взет от един и същ брой магьосници. Отличниците, които са взели и трите изпита, били:

- $\frac{2}{3}$ от тези, които са взели аритмантика и геомагика;
- $\frac{3}{4}$ от тези, които са взели геомагика и комбигурация;
- $\frac{4}{5}$ от тези, които са взели аритмантика и комбигурация.

На поправителна сесия се явили $\frac{1}{2}$ от тези, които са взели само аритмантика, $\frac{1}{9}$ от тези, които са взели само геомагика и $\frac{2}{19}$ от тези, които са взели само комбигурация.

Колко магьосници се явили на поправителната сесия?

Задача 2. Ян Бибиян и дяволчето Фют излезли от трънливата долчинка, всеки от тях се качил на един катер и отплавали по течението на реката към града. Катерът на Ян Бибиян се движел по-бързо, но когато изминал 8 км, видял на брега Калчо, който го помолил да го върне до воденицата. Без да губи време, Ян Бибиян качил Калчо и потеглил обратно. По пътя към воденицата се разминали с Фют, точно когото на дяволчето му оставала една трета от пътя до града.

Ян Бибиян оставил Калчо във воденицата, веднага продължил към града и пристигнал едновременно с Фют.

Колко километра е разстоянието от воденицата до града?

Задача 3. Даден е триъгълник ABC и вътрешна за него точка X, такава, че $S_{AXB} < S_{AXC} < S_{BXC}$. Построена е точка U, такава че четириъгълникът $AUBX$ е успоредник.

а) Ако $S_{AXC} = 10\,cm^2$, а $S_{BXC} = 16\,cm^2$, то намерете S_{CXU}.

б) Аналогично са построени точки V и W, така че $BVCX$ и $CWAX$ са успоредници. Докажете, че

$$S_{CXU} + S_{AXV} = S_{BXW}.$$

Задача 4. Да се намери най-малкото естествено число, за което е вярно, че ако $n \geq 2$ е броят на простите му делители, a е най-малкият му прост делител, а b е най-големият му прост делител, то

$$n + a + b = 2024.$$

Задача 5. Тази година възрастта на Милица е равна на 60% от възрастта на Ирина. Преди 3 години възрастта на Милица беше равна на 60% от възрастта на Теодора. А преди 6 години възрастта на Теодора беше равна на 60% от сбора от годините на Ирина и Милица.

На колко години е Милица сега?

Задача 6. На страните на триъгълника ABC са отбелязани общо 28 вътрешни точки, от които на страната AB лежи точно една точка, X.

Нека M е множеството на триъгълниците с върхове в отбелязаните вътрешни точки (без точките A, B, C). Броят на триъгълниците в M, които имат връх X, е равен на 15,6% от броя на триъгълниците в M, които нямат връх X.

а) Колко са четириъгълниците с върхове в отбелязаните точки (без точките A, B, C)?

б) Някои от отбелязаните точки свързали с отсечки. Оказало се, че всяка точка от страната AC е свързана с един и същ брой точки от страната BC, и всяка точка от страната BC е свързана с един и същ брой точки от страната AC. Ако всички построени отсечки са 77, колко от тях са с край в точката X?

Задача 7. Да се намерят всички двойки (m, n) от цели неотрицателни числа, за които $|4^m - 7^n|$ е просто число.

Задача 8. На дъската е начертана таблица с два реда и двадесет стълба, разграфена на единични квадратчета. Във всяко квадратче на първия ред Али записва естествено число между 1 и 1000 включително, като числата са различни. След това в някои (може нито едно или всички) от квадратчетата на втория ред Баба записва естествено число между 1 и 1000 включително (по едно число в квадратче), като числата са различни, а в във всяко от останалите квадратчета записва 0. (Може да има повече от една нула, но ненулевите числа трябва да са различни.) Накрая се пресмята сборът на двете числа във всяка колона.

Да се докаже, че без значение какви числа запише Али, винаги е възможно Баба да запише своите числа така, че получените сборове да са последователни естествени числа в някакъв ред.