Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Финал, Тема за 6 – 7 клас

Задача 1. Тази година Разпределителната шапка изпрати в Грифиндор с 20% повече момичета, отколкото миналата година, и с 30% по-малко момчета, отколкото миналата година. Броят на новоприетите ученици в Грифиндор тази година е трицифрено число, записано с ненулеви различни цифри и огледално на броя на новоприетите ученици в Грифиндор миналата година.

Колко ученици са приети в Грифиндор тази година?

Задача 2. По пътеката от хижа A до хижа B има чешма и пейка. В 8:00 Пешо тръгнал от хижа A към хижа B. Като изминал $\frac{2}{5}$ от пътя, минал край чешмата (без да спира). Когато му оставало да измине $\frac{1}{3}$ от пътя, минал край пейката (без да спира).

До пейката Пешо се разминал с Тошо, който вървял по пътеката към A.

Когато Пешо стигнал в B, по пътеката от B към A тръгнал Гошо. Гошо настигнал Тошо точно до чешмата и пристигнал в A в 10:00.

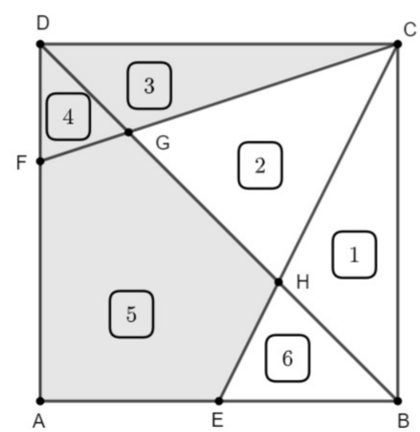
Ако приемем, че всеки от тримата се движел с постоянна скорост, намерете в колко часа Тошо е пристигнал в A.

Задача 3. Емо разрязал торта, изобразена на чертежа като квадрат $ABCD$. Първият разрез бил по диагонала BD, а вторият свързвал C със средата E на AB. Той планирал третия разрез да е от C до точка F от страната AD и така да получи 6 парчета, съответно означени на чертежа.

Как да избере Емо точката F (т.е. в какво отношение тя дели страната AD), ако иска:

а) парчетата 2 и 4 да са еднакво големи;

б) парчетата 3, 4 и 5 общо да са половината торта?



Задача 4. Даден е правоъгълник с дължина 1 и широчина 0,63. На първия ход поставяме вътре в правоъгълника квадрат със страна $\frac{1}{2}$, на следващия ход поставяме квадрат със страна $\frac{1}{3}$, така че да няма обща с точка с вече поставения, и така нататък- на k-тия ход поставяме квадрат със страна $\frac{1}{k+1}$, така че да няма обща точка с вече поставените квадрати. Възможно ли е да направим 2024 хода?

Задача 5. Вярно ли е, че най-малкото естествено число, което има поне 600 естествени делителя, всъщност има поне 1000 естествени делителя?

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с медиана CM ($M \in AB$) и височини AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$). Нека P и Q са съответно петите на перпендикулярите от върховете A и B до правата CM. Да се докаже, че

$$\frac{2}{AA_1} - \frac{2}{BB_1} \leq \frac{1}{AP} + \frac{1}{BQ}$$

и да се определи кои са всички триъгълници (или да се докаже, че такива не съществуват), при които равенство се достига.

Задача 7. За естествено число $n \geq 2$ нека p_n е най-голямото просто число, което дели n, p_{n+1} е най-голямото просто число, което дели $n+1$, q_n е най-голямото естествено число, което при повдигане на квадрат дава резултат, по-малък или равен на n и q_{n+1} е най-голямото естествено число, което при повдигане на квадрат дава резултат, по-малък или равен на $n+1$. Намерете всички естествени числа $n \geq 2$, такива че

$$p_n + q_n = p_{n+1} + q_{n+1}.$$

Задача 8. В стая има 100 души, като някои са приятели (приятелството е взаимно – ако A е приятел с B, то B е приятел с A). Всеки от тях има точно k приятели. Оказало се, че всеки двама души A и B с общ приятел всъщност имат общ приятел C, който е приятел с всички други приятели на A и всички други приятели на B. Да се намерят всички възможни стойности на k.