Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Финал, Тема за 6 – 7 клас

Задача 1. Тази година Разпределителната шапка изпрати в Грифиндор с 20% повече момичета, отколкото миналата година, и с 30% по-малко момчета, отколкото миналата година. Броят на новоприетите ученици в Грифиндор тази година е трицифрено число, записано с ненулеви различни цифри и огледално на броя на новоприетите ученици в Грифиндор миналата година.

Колко ученици са приети в Грифиндор тази година?

Отговор. 537 или 587.

Решение. Броят на приетите миналата година момичета се дели на 5; нека е $5a$. Тази година са приети $6a$ момичета.

Броят на приетите миналата година момчета се дели на 10; нека е $10b$. Тази година са приети $7b$ момчета.

Ако тази година са приети $\overline{xyz}$ ученици, миналата година са приети $\overline{zyx}$. Получаваме

$$5a + 10b = \overline{zyx}, \quad 6a + 7b = \overline{xyz}.$$

От първото равенство следва, че $\overline{zyx}$ се дели на 5, откъдето $x = 5$ (цифрата е ненулева). Тогава

$$5a + 10b = 100z + 10y + 5 \iff a + 2b = 20z + 2y + 1.$$

Като заместим във второто равенство с $a = 20z + 2y + 1 - 2b$, получаваме

$$5b = 119z + 2y - 494 = 120z - 495 + (1 + 2y - z).$$

Следователно цялото число $1 + 2y - z$ се дели на 5. Като отчетем, че цифрите 5, y и z са ненулеви и различни, получаваме следните възможности:

z	2, 7	3, 8	4, 9
y	3, 8	1, 6	4, 9

(Ако z дава остатък 1 при деление на 5, то y е 0 или 5, невъзможно.)

Получаваме 10 възможности за $\overline{xyz}$: 532, 582, 537, 587, 513, 563, 518, 568, 549, 594.

Може да съкратим проверките, като забележим, че $5b = 119z + 2y - 494 > 0$, т.е. $119z > 494 - 18 \iff z \geqq 5$. Като изразим

$$5a = 100z+10y+5-10b = 100z+10y+5-2(119z+2y-494) = 993+6y-138z > 0$$

получаваме, че $993 + 6y - 138z > 0$, следователно $138z < 993 + 6.9$, т.е. $z \leqq 7$.

Така $\overline{xyz}$ може да е само 537 или 587. (В първия случай $b = 69, a = 9$ и са приети 483 момчета и 54 момичета; във втория случай $b = 71, a = 15$ и са приети 497 момчета и 90 момичета.)

Оценяване. Получаване на равенствата $5a+10b = \overline{zyx}$ и $6a+7b = \overline{xyz}$ – 2 т.; доказване, че цифрата на стотиците $x = 5$ – 2 т.; изследване на възможните случаи – 6 т.; получаване на отговора – 2 т.

Задача 2. По пътеката от хижа A до хижа B има чешма и пейка. В 8:00 Пешо тръгнал от хижа A към хижа B. Като изминал $\frac{2}{5}$ от пътя, минал край чешмата (без да спира). Когато му оставало да измине $\frac{1}{3}$ от пътя, минал край пейката (без да спира).

До пейката Пешо се разминал с Тошо, който вървял по пътеката към A.

Когато Пешо стигнал в B, по пътеката от B към A тръгнал Гошо. Гошо настигнал Тошо точно до чешмата и пристигнал в A в 10:00.

Ако приемем, че всеки от тримата се движел с постоянна скорост, намерете в колко часа Тошо е пристигнал в A.

Отговор. 11 часа.

Решение. Нека пътят е $15s$. Тогава разстоянието от A до чешмата е $\frac{2}{5} \cdot 15s = 6s$, от пейката до B е $\frac{1}{3} \cdot 15s = 5s$, а между чешмата и пейката е $15s - (6s + 5s) = 4s$.

Да означим времето, за което Пешо, Гошо и Тошо изминават разстояние s съответно с a, b и c минути.

Пешо отишъл от A до B (т.е. изминал разстояние $15s$) за $15a$ минути, след което Гошо отишъл от B до A за $15b$ минути; това станало общо за 2 часа, т.е.

$$15a + 15b = 120 \iff a + b = 8.$$

След срещата с Тошо при пейката, Пешо изминал разстояние $5s$ за $5a$ минути, след което Гошо отишъл от B до чешмата за $9b$ минути; през това време Тошо отишъл от пейката до чешмата, като изминал разстояние $4s$ за $4c$ минути. Следователно

$$5a + 9b = 4c \iff 9(a + b) = 4c + 4a \iff 9 \cdot 8 = 4(a + c) \iff a + c = 18.$$

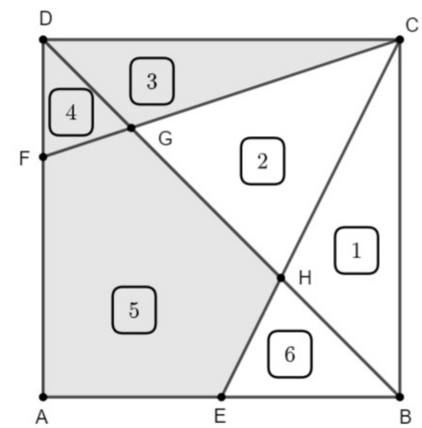
От $a+b=8$ и $a+c=18$ следва, че

$$c-b=10.$$

От чешмата до A разстоянието е $6s$; Гошо го изминал за $6b$ минути, а Тошо – за $6c$ минути. Тъй като $6c-6b=6\cdot 10=60$ минути, то Тошо е пристигнал в A 60 минути по-късно от Гошо, т.е. в 11 часа.

Оценяване. Изразяване на трите разстояния с едно неизвестно – 2 т.; за равенството $a+b=8$ – 3 т.; за равенството $a+c=18$ – 3 т.; за равенството $c-b=10$. – 1 т; получаване на отговор – 3 т.

Задача 3. Емо разрязал торта, изобразена на чертежа като квадрат $ABCD$. Първият разрез бил по диагонала BD, а вторият свързвал C със средата E на AB. Той планирал третия разрез да е от C до точка F от страната AD и така да получи 6 парчета, съответно означени на чертежа.



Как да избере Емо точката F (т.е. в какво отношение тя дели страната AD), ако иска:

а) парчетата 2 и 4 да са еднакво големи;

б) парчетата 3, 4 и 5 общо да са половината торта?

Отговор. а) $AF:FD=1:2$; б) $AF:FD=4:1$.

Решение. Да означим лицето на квадрата с S.

а) Първо намираме

$$BH:HD=S_{CBE}:S_{CDE}=\frac{S}{4}:\frac{S}{2}=1:2.$$

Ако $S_2=S_4$, то $S_{DFC}=S_4+S_3=S_2+S_3=S_{DHC}$, което означава, че разстоянията от F и от H до правата DC са равни, т.е. $FH||DC||AB$. Тогава

$$S_{AFB}=S_{ABH}=\frac{1}{3}S_{ABD}=\frac{1}{6}S$$

и оттук

$$AF:FD=S_{AFB}:S_{DFB}=\frac{1}{6}S:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)S=1:2.$$

б) Условието $S_3+S_4+S_5=\dfrac{1}{2}S=S_4+S_5+S_6$ е еквивалентно на равенството $S_3=S_6$.

От $EH : HC = S_{DBE} : S_{DBC} = \dfrac{S}{4} : \dfrac{S}{2} = 1 : 2$ получаваме, че

$$S_6 = \frac{1}{3} S_{EBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} = \frac{S}{12}.$$

Ако $AF : FD = a : b$, изразяваме

$$S_{CDF} = S_{BDF} = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{S}{2},$$

$$FG : GC = S_{DBF} : S_{DBC} = b : (a+b).$$

Тогава $S_3 : S_{CFD} = CG : CF = (a+b) : (a+2b)$ и

$$S_3 = \frac{a+b}{a+2b} \cdot S_{CFD} = \frac{a+b}{a+2b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{S}{2} = \frac{b}{a+2b} \cdot \frac{S}{2}.$$

Така $S_3 = S_6$ се свежда до равенството

$$\frac{b}{a+2b} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{12} \iff 6b = a + 2b \iff a = 4b,$$

т.е. $AF : FD = 4 : 1$.

Оценяване. а) 4 т.; б) 8 т.

Задача 4. Даден е правоъгълник с дължина 1 и широчина $0,63$. На първия ход поставяме вътре в правоъгълника квадрат със страна $\dfrac{1}{2}$, на следващия ход поставяме квадрат със страна $\dfrac{1}{3}$, така че да няма обща с точка с вече поставения, и така нататък – на k-тия ход поставяме квадрат със страна $\dfrac{1}{k+1}$, така че да няма обща точка с вече поставените квадрати. Възможно ли е да направим 2024 хода?

Решение. Трябва да ограничим $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{2025^2}$. Идеята е да ползваме $\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{n(n+1)}$, като запазваме първите няколко члена. Тъй като

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2025^2} > \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2026} > 0,63,$$

не е възможно да поставим квадратите без застъпване.

Забележка. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{66^2} < 0,63 < \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{67^2}$.

Оценяване. За верен отговор – 1 т. За идея да се използва телескопична сума – 3 т.; За вярна оценка – 8 т.

Задача 5. Вярно ли е, че най-малкото естествено число, което има поне 600 естествени делителя, всъщност има поне 1000 естествени делителя?

Отговор. Не.

Решение. Да допуснем, с цел противоречие, че a е минимално с поне 600 делителя и има поне 1000 такива. Ще използваме обичайното означение $\tau(m)$ за брой делители на m. Явно $a \geq 2$ и имаме два случая:

- Нека a се дели на p^2 за някое просто p. Ако $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ е разлагането на прости множители и без ограничение $\alpha_1 \geq 2$, то

  $$\tau(a) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k) \quad \text{и} \quad \tau(a/p_1) = \alpha_1(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k).$$

  Така $\tau(a)/\tau(a/p_1) = 1 + \frac{1}{\alpha_1} \leq \frac{3}{2}$ и значи $\tau(a/p_1) \geq \frac{2}{3}\tau(a)$. Но понеже $\tau(a) \geq 1000$, получаваме $\tau(a/p_1) \geq \frac{2}{3} \cdot 1000 > 600$. Следователно a/p_1 е естествено число с поне 600 делителя, но сега $a/p_1 < a$ противоречи с минималността на a.

- Нека a е произведение на k различни прости числа. Тогава $\tau(a) = 2^k$ и $\tau(a) \geq 1000$ дава $k \geq 10$. Оттук $a \geq 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29 = 6469693230 > 6\cdot 10^9$. От друга страна, $2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 11^2 = 1120581000 < 2\cdot 10^9 < a$ има $4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 3 = 768 > 600$ делителя, противоречие с минималността на a.

Оценяване. 6 т. за първия случай, от които 2 т. за разглеждане на a/p_1; 6 т. за втория случай, от които 2 т. за идеята да се намери число с поне 600 делителя, по-малко от произведението на първите 10 прости числа.

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с медиана CM ($M \in AB$) и височини AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$). Нека P и Q са съответно петите на перпендикулярите от върховете A и B до правата CM. Да се докаже, че

$$\frac{2}{AA_1} - \frac{2}{BB_1} \leq \frac{1}{AP} + \frac{1}{BQ}$$

и да се определи кои са всички триъгълници (или да се докаже, че такива не съществуват), при които равенство се достига.

Решение. Имаме $AA_1 = \dfrac{2S_{ABC}}{BC}, BB_1 = \dfrac{2S_{ABC}}{AC}, AP = \dfrac{2S_{ACM}}{CM} = \dfrac{S_{ABC}}{CM}, BQ = \dfrac{2S_{BCM}}{CM} = \dfrac{S_{ABC}}{CM}$. Така желаното неравенство е еквивалентно на

$$BC - AC \leq 2CM.$$

Сега ако точката C_1 е такава, че $CM = MC_1$, то AC_1BC е успоредник и свеждаме до $AC_1 - AC \leq CC_1$. Последното е вярно от неравенството на триъгълника (сборът на дължините на кои да е две страни в триъгълник

е по-голям от третата), приложено за ACC_1. Няма равенство, понеже A не лежи на правата CC_1. Следователно не съществуват триъгълници, при които равенство се достига.
Оценяване. 4 т. за свеждане до $BC - AC \leq 2CM$ (от които не повече от 2 т. за недовършени опити с лица), 2 т. за въвеждането на C_1, 2 т. за свеждане до $AC_1 - AC \leq CC_1$, 1 т. за обосновката на неравенството и 3 т. за твърдение и обосновка, че началното неравенство не може да е равенство.

Задача 7. За естествено число $n \geq 2$ нека p_n е най-голямото просто число, което дели n, p_{n+1} е най-голямото просто число, което дели $n+1$, q_n е най-голямото естествено число, което при повдигане на квадрат дава резултат, по-малък или равен на n и q_{n+1} е най-голямото естествено число, което при повдигане на квадрат дава резултат, по-малък или равен на $n+1$. Намерете всички естествени числа $n \geq 2$, такива че

$$p_n + q_n = p_{n+1} + q_{n+1}.$$

Отговор. 3
Решение. Числата n и $n+1$ са взаимнопрости (общ делител трябва да дели разликата 1), значи $p_n \neq p_{n+1}$. Оттук $q_n \neq q_{n+1}$ и понеже $q_n \leq q_{n+1} \leq q_n + 1$, то непременно $q_{n+1} - q_n = 1$, съответно $p_n - p_{n+1} = 1$. Предвид, че p_n и p_{n+1} са прости числа с разлика 1, единствената възможност е $p_{n+1} = 2$ и $p_n = 3$, съответно $n = 3^k$ и $n + 1 = 2^m$ за някакви естествени числа k и m.

Работим с уравнението $3^k + 1 = 2^m$. При $m \geq 3$ то няма решение, понеже дясната страна се дели на 8, докато степен на 3 дава остатък 3 или 1. При $m = 1$ също няма решение, а при $m = 2$ получаваме $n = 3$, което работи понеже $p_3 = 3$, $q_3 = 1$, $p_4 = 2$, $q_4 = 2$ и $3 + 1 = 2 + 2$.
Оценяване. 1 т. за верен отговор, 2 т. за доказване на $p_n \neq p_{n+1}$, 2 т. за заключението, че $q_{n+1} - q_n = p_n - p_{n+1} = 1$, 1 т. за $p_{n+1} = 2$ и $p_n = 3$, 6 т. за отхвърляне (напр. чрез модул 8) на $3^k + 1 = 2^m$ за $m \geq 3$.

Задача 8. В стая има 100 души, като някои са приятели (приятелството е взаимно – ако A е приятел с B, то B е приятел с A). Всеки от тях има точно k приятеля, където k е цяло неотрицателно число. Оказало се, че всеки двама души A и B с общ приятел всъщност имат общ приятел C, който е приятел с всички други приятели на A и всички други приятели на B. Да се намерят всички възможни стойности на k.
Отговор. Всички k, за които $k+1$ дели 100, т.е. $0, 1, 3, 4, 9, 19, 24, 49, 99$.
Решение. Ако $k+1$ дели 100, то можем да разделим хората на групи от по $k+1$ души, като двама са приятели точно когато са в една и съща група.

Обратно, ще докажем, че няма друга възможност за приятелствата. Ако $k = 1$, то понеже всеки има точно един приятел, непременно хората се разбиват на двойки. Оттук нататък ще считаме $k \geq 2$. Ключовото наблюдение е следното:

Твърдение. Ако A и B имат общ приятел, то те са приятели и имат едно и също множество от приятели.

Доказателство. По условие A и B имат общ приятел C, който е приятел с всички останали приятели на A и B. Имаме два случая:

- Нека A и B не са приятели. Тогава C трябва да бъде приятел с останалите $k-1$ приятели на A и останалите $k-1$ приятели на B. Ако A и B имат $e \leq k-1$ общи приятели, с изключение на C, тогава от принципа на включването и изключването $k = 2 + 2(k-1) - e$ (първите 2 са защото C е приятел с A и B), така че $e = k$, което противоречи на $e \leq k-1$ и на допускането, че A и B не са приятели.

- Следователно A и B трябва да бъдат приятели. Тогава C трябва да бъде приятел с останалите $k-2$ приятели на A и останалите $k-2$ приятели на B. Ако A и B имат $e \leq k-2$ общи приятели, с изключение на C, тогава от принципа на включването и изключването $k = 2+2(k-2)-e$ (първите 2 са защото C е приятел с A и B), така че $e = k-2$. В частност A и B имат един и същ набор от приятели. Твърдението следва.

За да завършим, нека съобразим, че за $k \geq 2$ всяка група, в която всеки е приятел с поне един друг, има двама души с общ приятел – наистина, ако A е приятел на C и (поради $k \geq 2$) B е приятел на някой друг, напр. B, то A и B са с общ приятел C. От твърдението следва, че в тази група непременно всички са приятели (и са $k+1$ на брой), както се искаше.

Оценяване. 1 т. за верен отговор, 1 т. за примери, 2 т. за формулиране на основното твърдение, 6 т. за доказването му (по 3 т. за всеки от двата случая), 2 т. за довършване.