Тринадесети фестивал на младите математици
Созопол, 2024 г.
Първи кръг, Тема за 8 – 9 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. Съществува ли естествено число $n \geq 4$, за което $n^3 - n + 3$ е степен на 3?

Решение. Да, например при $n = 13$ изразът е равен на $2187 = 3^7$.

Оценяване. 0 т. за верен отговор, 8 т. за верен пример и 4 т. за проверката му.

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC с $AC = BC > AB$. Симетралата на страната AC пресича страната BC в точка D и описаната около триъгълника ABD окръжност ω за втори път в точката E, като E е вътрешна за триъгълника ABC. Нека F е диаметрално противоположната точка на E в ω и J е центърът на външновписаната окръжност към триъгълника BDF срещу върха F. Да се докаже, че четириъгълникът $BJCF$ е вписан в окръжност.

Решение. Явно $AC \parallel DF$ (перпендикулярни са на DE), откъдето с $AD = DC$ получаваме $\sphericalangle BDF = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \sphericalangle ADB$, т.е. $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BDF$. Така окръжността ω дава $AF = FB$ и заедно с $AC = BC$ заключаваме, че CF е симетралата на AB.

Да означим $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF = x$. Пресмятаме $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB = 2x$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BAC - \sphericalangle DAC = 90^\circ - 3x$ и $\sphericalangle JFB = \frac{1}{2} DFB = \frac{1}{2} \sphericalangle DAB = 45^\circ - \frac{3x}{2}$. От друга страна, $\sphericalangle FBD = \sphericalangle ADF + \sphericalangle ABC = 90^\circ + x$, откъдето $\sphericalangle FBJ = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle FBD = 135^\circ + \frac{x}{2}$ и заедно с $\sphericalangle JFB = 45^\circ - \frac{3x}{2}$ заключаваме $\sphericalangle BJF = x = \sphericalangle BCF$, с което желаното следва.

Оценяване. 4 т. за доказване, че CF е симетралата на AB, от които 2 т. за $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BDF$, 1 т. за $AF = FB$ и 1 т. за довършване; по 2 т. за изразяване на всеки от ъглите на триъгълника BFJ чрез ъгъл на триъгълника ABC; 2 т. за проверка на $\sphericalangle BCF = \sphericalangle BJF$ и финален извод.

Задача 3. За цяло неотрицателно число k означаваме $a_k = \dfrac{4(k-1012)}{(k+2)(2024-k)}$.

а) Намерете всички двойки (x, y) от реални числа с $a_k = \dfrac{x}{k+2} + \dfrac{y}{2024-k}$ за всяко k.

б) Намерете най-голямото цяло число, по-малко или равно на сбора $a_0 + a_1 + \cdots + a_{2023}$.

Отговор. а) $x = -\dfrac{2028}{1013}$ и $y = \dfrac{2024}{1013}$ б) 1

Решение. а) Искаме еквивалентното $4k - 4048 = x(2024-k) + y(k+2) = (y-x)k + 2024x + 2y$. Последното е изпълнено за всяко k точно когато $y - x = 4$ и $2024x + 2y = -4048$, съответно $x = -\dfrac{4056}{2026} = -\dfrac{2028}{1013}$ и $y = \dfrac{2024}{1013}$.

б) От а) имаме $a_k = \dfrac{4}{1013}\left(\dfrac{506}{2024-k} - \dfrac{507}{k+2}\right)$ и след опростяване получаваме, че търсеният сбор е равен на

$$\frac{4}{1013}\left(506 - \frac{507}{2025} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2024}\right). \qquad (*)$$

Явно той не надминава $\dfrac{4}{1013}\cdot 506 = \dfrac{2024}{1013} < 2$. За да видим, че е поне 1, предвид $\frac{507}{2025}$, достатъчно е да докажем, че $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2024} < 250$, понеже тогава основният израз ще е поне $\dfrac{4}{1013}\cdot(506-1-250) = \dfrac{4\cdot 255}{1013} = \dfrac{1020}{1013} > 1$. За последното е достатъчно да съобразим, че първите две събираеми са със сбор под $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, следващите 4 – под $4\cdot\frac{1}{4}=1$, аналогично за следващите 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 и последните 1001 – така общият сбор е под $10 < 250$.

Оценяване. 4 т. за а), от които 2 т. за правилно съставяне на системата за x и y и 2 т. за решаването; 8 т. за б), от които 1 т. за верен отговор, 2 т. за $(*)$, 2 т. за доказване на горната граница и 3 т. за доказване на долната граница.

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се намери най-голямото естествено число k, за което в шахматна дъска $n \times n$ можем да поставим $n-2$ барикади, по една в поле, и k топа, по един в поле, така че никои два топа да не се атакуват.
(*Два топа се атакуват, ако са в един и същи ред или колона и между тях няма барикада.*)

Отговор. $2n-2$

Решение. Една възможност с $2n-2$ топа е както следва: разполагаме барикадите по главния диагонал, без първата и последната клетка, а топовете в двата диагонала, които са непосредствено над и под главния. За оценката, нека съобразим, че в ред с t барикади има най-много $t+1$ топа. Сумирайки по всички редове, окончателно общият брой топове е не повече от $(n-2)+n = 2n-2$.

Оценяване. 2 т. за верен отговор, 4 т. за пример, 6 т. за оценка (от които 2 т. за наблюдението, че в ред/колона с t барикади има най-много $t+1$ топа).

Задача 5. Да се намерят всички тройки (x,y,z) от реални числа, такива че

$$\frac{(x+y)^2}{(y+z)(z+x)}+\frac{(y+z)^2}{(z+x)(x+y)}+\frac{(z+x)^2}{(x+y)(y+z)} = x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) = 3.$$

Отговор. $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ и $\left(x,\dfrac{-x^2\pm\sqrt{x^4+4x}}{2x},-x-\dfrac{-x^2\pm\sqrt{x^4+4x}}{2x}\right)$, където $x\in\left(-\infty,-\sqrt[3]{4}\right]\cup(0,\infty)$ е произволно реално число.

Решение. От най-лявата и най-дясната страни получаваме $(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3 = 3(x+y)(y+z)(x+z)$, еквивалентно на (след разкриване на скобите) $2(x^3+y^3+z^3-3xyz)=0$. Това се разлага до

$$(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)=0.$$

Вторият множител е 0 точно когато $x=y=z$ – в този случай средната и дясната страни дават $6x^3=3$, т.е. $x=y=z=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Оттук нататък считаме $x+y+z=0$. Средната и дясната страни водят до $3xy(x+y)=3$, т.е. $xy^2+x^2y-1=0$. Никое от x, y и $x+y$ не може да е 0 в последното и понеже $x+y+z=0$, то следва, че всяко решение на това уравнение ще е и на цялата система, понеже знаменателите в даденото ще са ненулеви. За $x\neq 0$ решаването на последното уравнение като квадратно относно y, с дискриминанта $x^4+4x = x(x^3+4)$, дава тройките от отговора.

Оценяване. 1 т. за пълно разглеждане на $x = y = z$, 5 т. за получаване на $x + y + z = 0$ когато не всички променливи са равни (от които 1 т. за $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, 2 т. за разлагане и 2 т. за отхвърляне на квадратния множител), 2 т. за свеждане до уравнение от втора степен на две променливи, 3 т. за решаването на това уравнение и пълно описание на отговора, 2 т. за обосновка, че наистина няма нулеви знаменатели в дадените за всяко получено решение.

Задача 6. Да се намерят всички четворки (k, m, n, p) от цели неотрицателни числа k, m, n и просто число p, такива че $|4^m - 7^n| = p^k$.

Отговор. $(k, m, n, p) = (1, 1, 0, 1), (2, 2, 1, 3)$, $(1, 1, 1, 3)$

Решение. Понеже $4^m \equiv 7^n \equiv 1 \pmod 3$, непременно $p = 3$ и $k \geq 1$. Имаме два случая:

- Нека $4^m - 7^n = 3^k$. При $m = 0$ няма решение, при $m = 1$ следва $n = 0$ с $k = 1$, нека $m \geq 2$. По модул 8 получаваме, че k е четно. При $k = 2s$ имаме $(2^m - 3^s)(2^m + 3^s) = 7^n$. Най-големият общ делител на множителите вляво дели разликата $2 \cdot 3^s$, т.е. е 1, понеже никой от множителите не се дели на 2 или на 3. Оттук непременно $2^m - 3^s = 1$ (и $2^m + 3^s = 7^n$). В последното $m = 2$ дава $s = 1$ (съответно $k = 2$ и $n = 1$), а $m \geq 3$ е невъзможно по модул 8.

- Нека $7^n - 4^m = 3^k$. Разглеждаме два подслучая:
  - Нека $m \geq 2$. По модул 8 следва, че n и k са четни. При $n = 2t$ имаме разлагането $(7^t - 2^m)(7^t + 2^m) = 3^k$. Най-големият общ делител на множителите вляво дели разликата $2 \cdot 7^t$, т.е. е 1, понеже никой от множителите не се дели на 2 или на 7. Оттук непременно $7^t - 2^m = 1$ (и $7^t + 2^m = 3^k$), което е невъзможно по модул 3.
  - Нека $m = 1$, т.е. $7^n - 3^k = 4$. Явно $n = 1$ върши работа (с $k = 1$), нека $n \geq 2$. Директни пресмятания до 3^{42} по модул 49 показват, че за $3^k \equiv -4 \pmod{49}$ е необходимо $k = 42x + 31$ за някое цяло неотрицателно x. Но тогава по модул 43 (предвид $3^{42} \equiv 1 \pmod{43}$ от малката теорема на Ферма) получаваме $7^n \equiv 3^{31} - 4 \equiv 29 \pmod{43}$, което е невъзможно (пресметнете до $7^6 \equiv 1 \pmod{43}$).

Коментар. Уравнението $7^n - 3^k = 4$ може да се реши и чрез комбиниране на изводи от модулите 7, 9, 19.

Оценяване. 1 т. за напълно верен отговор, 1 т. за доказване на $p = 3$, 3 т. за първия случай (от които 1 т. за k – четно, 1 т. за $2^m - 3^s = 1$ и 1 т. за довършване), 3 т. за първия подслучай на втория случай (от които 1 т. за n – четно, 1 т. за $7^t - 2^m = 1$ и 1 т. за довършване) и 4 т. за втория подслучай на втория случай (от които 2 т. за извода от модул 49, 1 т. за разглеждане на модул 43 и 1 т. за довършване).

Задача 7. Вписаната в триъгълника ABC окръжност допира страните AC, BC и AB в точките D, E и F, съответно. Нека k е описаната около триъгълника ABC окръжност. Права измежду DE, DF и EF ще наричаме *разделяща*, ако дели на две равни части поне една от дъгите $\widehat{AB}$ (несъдържаща C), $\widehat{AC}$ (несъдържаща B) и $\widehat{BC}$ (несъдържаща A) на окръжността k, и *двойно-разделяща*, ако дели на две равни части две от тези дъги. Да се докаже, че ако триъгълникът ABC има разделяща права, то:

а) той е правоъгълен б) той няма друга разделяща права

в) разделящата права е двойно-разделяща

Решение. Имаме $MA = MI$, където I е центърът на вписаната окръжност (лема на тризъбеца или директно преследване на ъгли) и $AI \perp DE$. Така DE минава през средата M на дъгата $\widehat{AB}$ тогава и само тогава когато DE е симетрала на AI, което се случва точно когато $ADIE$ е квадрат, еквивалентно на $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Значи в ABC няма втора разделяща права (иначе би имал два прави ъгъла) и разделящата права е двойно-разделяща (в показания случай – с дъгата $\widehat{AC}$).

Оценяване. По 4 т. за всяко от а), б), в).

Задача 8. На PROMYS Europe в Оксфорд през лятото 18 души, наредени в кръг, играят Мафия, като 6 от тях са мафиоти и 12 от тях са жители. Кралят и Кралицата са други двама (не сред 18-те) и играят следната игра, редувайки се, като Кралят започва първи. Кралят не знае кои са мафиотите и кои са жителите, а Кралицата знае. На свой ход Кралят избира някои (възможно всички или нито един) от 18-те, които все още не са елиминирани, и ги елиминира. На свой ход Кралицата избира един жител, който е съседен (в кръга) на мафиот, и го елиминира. След всеки ход неелиминираните играчи се приближават по-близо без да сменят реда си, но отново да образуват кръг. Играта приключва, когато всички мафиоти или всички жители са елиминирани.

Да се даде пример за първоначално разположение на 18-те играча, при което Кралят няма стратегия, с която да подсигури, че поне един жител ще остане в края на играта.

Решение. Ако пишем M за мафиот и T за жител, то една възможност е

$$MTTMTTMTTMTTMTTMTT.$$

Наистина, Кралицата може мислено да раздели хората на шест групи MTT и да играе така: ако все още има група от трима, то тя елиминира централния играч от нея; ако всички групи са от двама, тя елиминира единствения жител; в противен случай всички жители са вече елиминирани. Това работи, понеже след елиминирането на централен жител Кралят не знае кой от двата съседа е мафиот и кой жител, съответно при налучкване той може да сгреши, а ако не налучква, то той или елиминира и двамата (и групата напълно изчезва), или не елиминира нито един (при което групата остава с жител и мафиот и Кралицата елиминира жителят измежду тях).

Коментар. Друга работеща наредба (с по-трудно доказателство, до колкото ни е известно) е $MMMMMMTTTTTTTTTTTT$.

Оценяване. 2 т. за деклариране на работеща наредба и 10 т. за нейното доказване – при тази от решението: 3 т. за разбиване на последователни тройки, 3 т. за описване на стратегията на Кралицата в зависимост от колко души има в тройката и 4 т. за обосновка защо тази стратегия работи.