Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Трети кръг, Тема за 8 – 9 клас

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа n, такива че $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ има точно четири различни прости делителя.

Задача 2. Естествените числа a и $n \geq 2$ са такива, че

$$a = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor .$$

Да се намери най-голямата възможна стойност на a.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 85^\circ$. Точката M е вътрешна за триъгълника и е такава, че $AM = BC$ и $\sphericalangle AMB = 95^\circ$. Правата през M, успоредна на AB, пресича страната AC в точка N. Да се намери големината на $\sphericalangle NBC$.

Задача 4. Естествените числа от 1 до 60 са наредени в редица, първоначално в нарастващ ред. За един ход е позволено да разменим местата на две от числата, стига те да имат общ делител, по-голям от 1. Колко различни редици можем да получим с краен брой ходове?

Задача 5. Даден е триъгълник ABC с медицентър G, за който $\sphericalangle ACB = 85^\circ$ и $\sphericalangle AGB = 140^\circ$. Точките K и L съответно от отсечките BG и AG са такива, че $\sphericalangle CAK = \sphericalangle CBL = 40^\circ$. Да се намери големината на $\sphericalangle KCL$.

Задача 6. В равнината са разположени 16 точки, като никои три от тях не лежат на една права. Нека N е броят начини (който зависи от разположението на точките), по които точките могат да се надпишат с числата $1, 1, 2, 2, \ldots, 8, 8$ така, че за всеки две $1 \leq i < j \leq 8$ отсечката, свързваща точките с номер i, и отсечката, свързваща точките с номер j, не се пресичат. Намерете най-малката възможна стойност на N.

Задача 7. За естествено число n означаваме

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n+1}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}\right).$$

Да се докаже, че $a_n \geq a_{n+1}$ за всяко естествено число n.

Задача 8. Да се намерят всички тройки (a, b, p) от естествени числа, където p е просто, такива че остатъците на числата $an^2 + bn$, $n = 0, 1, \ldots, p-1$, при деление на p са два по два различни.