Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Трети кръг, Тема за 8 – 9 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа n, такива че $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ има точно четири различни прости делителя.

Отговор. 3, 4, 5, 6

Решение. Директно се проверява, че $n = 1, 2$ не работят (делителите са само 2, 3 и 5), че $n = 3, 4, 5, 6$ работят (делителите са 2, 3, 5 и 7), че $n = 7$ не работи (делителите са 2, 3, 5, 7, 11) и че $n = 8$ работи (делителите са 2, 3, 5, 11). Ще докажем, че няма възможни $n \geq 9$. Нека имаме предвид, че за всяко просто число $p \geq 5$ измежду пет последователни естествени числа най-много едно се дели на p.

- Нека първо n е нечетно. Тогава числата n, $n+2$ и $n+4$ са две по две взаимнопрости (понеже разликите 2 и 4 нямат нечетни делители, по-големи от 1) и точно едно от тях се дели на 3.
  - Ако това е $n+2$, то трябва да е степен на 3, а n и $n+4$ да са степени на другите два прости делителя, съответно $n+1$ и $n+3$ може да са само степени на двойката, което е невъзможно за $n \geq 7$, понеже разликата между две степени на двойката, по-големи или равни на 4, е по-голяма от 2.
  - Ако това е n или $n+4$, без ограничение n (двата случая са аналогични), то $n+3$ се дели само на 2 и 3, а $n+2$ и $n+4$ – на другите два прости делителя – съответно $n+1$ е степен на 2. При $n = 2^k - 1$, $k \geq 3$ и $n = 3^a$ остава да съобразим, че $2^k - 1 = 3^a$ няма решение по модул 8.
- Нека сега n е четно. Тогава $n+1$ и $n+3$ са нечетни и взаимнопрости.
  - Ако никое от тях не се дели на 3, то $n+2$ се дели на 3 и n и $n+4$ са степени на 2, невъзможно за $n \geq 8$.
  - Ако без ограничение $n+3$ (и n) се дели на 3 (случаят за $n+1$ и $n+4$ е аналогичен), то или $n+3$ е степен на 3, или n, $n+1$ и $n+3$ съдържат всички нечетни прости делители. В първата ситуация $n = 3^k - 3$ за $k \geq 3$ и поне едно от $n+2$ и $n+4$ е степен на 2, но $3^k + 1 = 2^a$ е невъзможно по модул 8, а при $3^k - 1 = 2^a$ трябва $k = 2t$, $t \geq 2$ да е четно от модул 4 и $(3^t - 1)(3^t + 1) = 2^a$, като вторият множител не е степен на 2 поради модул 8. Във втората ситуация следва, че $n+2$ и $n+4$ са степени на 2, невъзможно за $n \geq 9$. (В аналогичната ситуация за $n+1$ – когато $n+1$ е степен на 3, т.е. $n = 3^k - 1$ и $n+4 = 3^k + 3 = 2^a 3^b$ за $k \geq 2$ тъй като $n \geq 9$, то по модул 9 следва $b = 1$ и $3^{k-1} + 1 = 2^a$ няма решение за $k \geq 3$ по модул 8.)

Оценяване. 1 т. за верен отговор и проверка на всички $n \leq 8$, 1 т. за отбелязване на НОД$(n+1, n+3) = 1$ при четно n и НОД$(n, n+2) =$ НОД$(n+2, n+4) =$ НОД$(n, n+4)$ при нечетно n, 5 т. за n нечетно, от които 2 т. за първия подслучай и 3 т. за втория, 5 т. за n четно, от които 2 т. за първия подслучай и 3 т. за втория.

Задача 2. Естествените числа a и $n \geq 2$ са такива, че

$$a = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor .$$

Да се намери най-голямата възможна стойност на a.
(*За реално число x със $\lfloor x \rfloor$ се означава най-голямото цяло число, ненадминаващо x.*)

Отговор. 23

Решение. От неравенствата $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t$ имаме

$$a \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - n + 1 < a \leq a \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

което може да се запише и като

$$0 \leq a \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 1 \right) < n - 1.$$

Понеже $a > 0$, то за лявото неравенство е необходимо и достатъчно $n \geq 4$. Дясното е еквивалентно на

$$\frac{a}{n} < \frac{n-1}{n\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 1\right)}$$

като дясната страна е по-малка от 1 за $n \geq 11$ поради еквивалентното $n\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 2\right) > -1$ и $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{11} = 2\frac{451}{27720} > 2$. Извод: за $n \geq 11$ събираемото $\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$ е 0 и значи ако a е решение за n, то a е решение и за $n - 1$. Оттук вече можем да считаме, че $n \leq 10$.
Стойността на дясната страна в

$$a < \frac{n-1}{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 1}$$

за $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ е съответно $\frac{240}{17}$, $\frac{100}{9}$, $\frac{840}{83}$, $\frac{1960}{201}$, $\frac{20160}{2089}$, $\frac{22680}{2341}$, като всички тези дроби са по-малки от 23. Остава отделно да се справим със случая $n = 4$. Една възможност е да се пресметне горната граница 36 и да се проверят директно $a = 23, 24, \ldots, 35$; по-бърз подход е както следва. От неравенството $\left\lfloor \frac{a}{t} \right\rfloor \geq \frac{a-t+1}{t}$ за естествени a и t следва $a \geq \frac{a-1}{2} + \frac{a-2}{3} + \frac{a-3}{4}$, еквивалентно на $a \leq 23$, а пък $a = 23$ изпълнява уравнението.

Оценяване. 2 т. за верен отговор, 2 т. за решаване на уравнението при $n = 4$, 4 т. за ясната цел да се ограничи $\frac{a}{n}$ отгоре с 1, за да се сведе до краен брой n, 2 т. за извършване на ограничението, 2 т. за проверяване на оставащите n.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 85^\circ$. Точката M е вътрешна за триъгълника и е такава, че $AM = BC$ и $\sphericalangle AMB = 95^\circ$. Правата през M, успоредна на AB, пресича страната AC в точка N. Да се намери мярката на $\sphericalangle NBC$.

Отговор. 10°

Решение. (Първи начин) Нека P е симетричната точка на M относно AB – явно $AMBP$ е успоредник и от $\sphericalangle APB = \sphericalangle AMB = 95^\circ = 180^\circ - \sphericalangle ACB$ следва, че $APBC$ е вписан. Предвид $AM = BC$ от даденото и $AM = BP$ от успоредника, имаме $BP = BC$ и значи AB е ъглополовяща на $\sphericalangle CAP$. Оттук $\sphericalangle NAB = \sphericalangle PAB = \sphericalangle ABM$, значи $ABMN$ е равнобедрен трапец и $\sphericalangle ANB = \sphericalangle AMB = 95^\circ$. Окончателно $\sphericalangle NBC = \sphericalangle ANB - \sphericalangle ACB = 10^\circ$.

(Втори начин, Иво Кортезов) Нека точката P от правата AC е такава, че C е между A и P и $CP = BM$. Явно $\sphericalangle BCP = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle AMB$ и $AM = BC$, откъдето $\triangle AMB \cong \triangle BCP$, съответно $AB = BP$, т.е. $\sphericalangle PAB = \sphericalangle APB$, и $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CPB$. Но тогава $\sphericalangle NAB = \sphericalangle ABM$ и от $AB \parallel MN$ следва, че $ABMN$ е равнобедрен трапец. Оттук $\sphericalangle ANB = \sphericalangle AMB = 95^\circ$ и окончателно $\sphericalangle NBC = \sphericalangle ANB - \sphericalangle ACB = 10^\circ$.

Оценяване. 1 т. за верен отговор, 2 т. за въвеждането на P, 2 т. за $APBC$ – вписан, 2 т. за AB – ъглополовяща на $\sphericalangle CAP$, 3 т. за $ABMN$ – равнобедрен трапец, 2 т. за довършване.

Задача 4. Естествените числа от 1 до 60 са наредени в редица, първоначално в нарастващ ред. За един ход е позволено да разменим местата на две от числата, стига те да имат общ делител, по-голям от 1. Колко различни редици можем да получим с краен брой ходове?

Отговор. 52!

Решение. Простите числа между 30 и 60 (7 на брой: 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59) и 1 не могат да бъдат премествани, понеже няма друго число в редицата, което да има общ делител по-голям от 1 с кое да е от тях. Ще докажем, че всяка пермутация на останалите 52 числа е достижима, откъдето ще следва и отговорът.

Да предположим, че двойките размени (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4) са възможни. Тогава от конкретна пермутация можем да получим такава, в която само a_1 и a_4 са разменени (и всяко друго число в пермутацията си стои на мястото) чрез последователно прилагане в този ред на размените (a_3, a_4), (a_2, a_3), (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4).

Остава да намерим подходяща верига от двойки между всеки две от гореспоменатите 52 числа. Наистина, ако за такива x и y изберем прости делители d_x и d_y, по-малки от 30 (ако x е просто, то $d_x = x$ работи, а иначе избираме $d_x \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{60} < 30$), то възможна верига е $(x, 2d_x)$, $(2d_x, 2d_y)$, $(2d_y, y)$ при $d_x \neq d_y$; а при $d_x = d_y$ е позволено веднага да разменим x и y.

Оценяване. 1 т. за верен отговор, 2 т. за предположението, че всеки две от споменатите 52 числа могат да се разменят без да се сменят местата на другите, 3 т. за доказване, че при верига от три двойки (или от произволен брой двойки) може да се направи така, че само първото и последното число да се разменят, 6 т. за илюстриране на такава верига за всеки две от числата.

Задача 5. Даден е триъгълник ABC с медицентър G, за който $\sphericalangle ACB = 85^\circ$ и $\sphericalangle AGB = 140^\circ$. Точките K и L съответно от отсечките BG и AG са такива, че $\sphericalangle CAK = \sphericalangle CBL = 40^\circ$. Да се намери големината на $\sphericalangle KCL$.

Отговор. 55°

Решение. (Първи начин) Нека AG и BG пресичат страните BC и AC в средите A_1 и B_1 съответно. Имаме $\sphericalangle B_1AK = \sphericalangle CAK = 40^\circ = 180^\circ - \sphericalangle AGB = \sphericalangle AGB_1$, откъдето $\triangle B_1AK \sim \triangle B_1GA$ и $AB_1^2 = B_1G \cdot B_1K$. Сега от $AB_1 = B_1C$ следва $CB_1^2 = B_1G \cdot B_1K$ и с $\sphericalangle CB_1G = \sphericalangle CB_1K$ получаваме $\triangle B_1CG \sim \triangle B_1KC$, значи $\sphericalangle KCG = \sphericalangle B_1GC - \sphericalangle B_1KC = \sphericalangle B_1GC - \sphericalangle B_1CG$. Аналогично $\sphericalangle LGC = \sphericalangle A_1GC - \sphericalangle A_1CG$ и окончателно $\sphericalangle KCL = \sphericalangle A_1GB_1 - \sphericalangle A_1CB_1 = \sphericalangle AGB - \sphericalangle ACB = 55^\circ$.

(Втори начин) Нека AG и BG пресичат страните BC и AC съответно в средите A_1 и B_1 и нека A_2 и B_2 са симетричните точки на G спрямо A_1 и B_1, съответно. Явно AB_2CG

е успоредник, откъдето $\sphericalangle CB_2K = \sphericalangle CB_2G = \sphericalangle AGB_1 = \sphericalangle CAK$, съответно CB_2AK е вписан; аналогично CA_2BL е вписан. Оттук $\sphericalangle ACK = \sphericalangle AB_2K = \sphericalangle AB_2G = \sphericalangle B_1GC$; аналогично $\sphericalangle BCL = \sphericalangle A_1GC$ и окончателно $\sphericalangle KCL = \sphericalangle A_1GB_1 - \sphericalangle A_1CB_1 = \sphericalangle AGB - \sphericalangle ACB = 55^\circ$.

Оценяване. 1 т. за верен отговор, 1 т. за $\sphericalangle B_1AK = \sphericalangle AGB_1$, 2 т. за $AB_1^2 = B_1G \cdot B_1K$ (от които 1 т. за $\triangle B_1AK \sim \triangle B_1GA$), 2 т. за $CB_1^2 = B_1G \cdot B_1K$, 2 т. за извода $\sphericalangle KCG = \sphericalangle B_1GC - \sphericalangle B_1CG$ (от които 1 т. за $\triangle B_1CG \sim \triangle B_1KC$), 3 т. за $\sphericalangle LGC = \sphericalangle A_1GC - \sphericalangle A_1CG$ с аналогично прехвърляне, 1 т. за довършване.

Задача 6. В равнината са разположени 16 точки, като никои три от тях не лежат на една права. Нека N е броят начини (който зависи от разположението на точките), по които точките могат да се надпишат с числата 1, 1, 2, 2, ..., 8, 8 така, че за всеки две $1 \leq i < j \leq 8$ отсечката, свързваща точките с номер i, и отсечката, свързваща точките с номер j, не се пресичат. Намерете най-малката възможна стойност на N.

Отговор. $8! \cdot 1430 = 57657600$

Решение. Нека M е отговорът на аналогичната задача, в които няма значение коя отсечка кои номера свързва (а от значение е само това, че те не се пресичат) – явно $N = M \cdot 8!$. За $2n$ точки ще докажем с индукция по n, че $M \geq C_n$, където редицата $(C_n)_{n\geq 1}$ (известна като *числа на Каталан*) се задава с $C_0 = C_1 = 1$ и $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i}$. За базата $n = 1$ всъщност имаме $M = 1 = C_1$ без значение как са разположени точките.

За стъпката, да разгледаме за дадените $2n$ точки най-малкия изпъкнал многоъгълник, който (заедно с вътрешността му) ги съдържа (това е известно като *изпъкнала обвивка*); поне една от точките A е неин връх. Нека останалите точки са P_1, P_2, ..., P_{2n-1}, подредени така по посока на часовниковата стрелка спрямо A (за да измерите коя точка е "по-наляво" от друга, я свържете мислено с A). Тогава за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ можем да свържем A с P_{2i-1} и да свържем помежду си $P_1, P_2, \ldots, P_{2i-2}$ (поне C_{i-1} начина съгласно индукционното допускане) и помежду си $P_{2i}, P_{2i+1}, \ldots, P_{2n-1}$ (поне C_{n-i} начина съгласно индукционното допускане). Оттук броя начини за $2n$ точки е поне $\sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i} = C_n$, като равенство се достига когато те са върхове на изпъкнал $2n$-ъгълник. Остава постъпково да пресметнем $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$, $C_7 = 429$, $C_8 = 1430$ (или чрез известната формула $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$).

Оценяване. 2 т. за верен отговор, 2 т. за предположението за $2n$ точки $M \geq C_n$, където $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i}$, 5 т. за доказването му (от които 2 т. за разглеждане на подходящ екстремален елемент, напр. връх от изпъкналата обвивка), 1 т. за даване на ситуация, при която се достига равенство и 2 т. за нейното аргументиране (може чрез аргументите за оценката). При други решения: 2 т. за верен отговор, 7 т. за оценката, 1 т. за пример, 2 т. за обосновка на примера.

Задача 7. За естествено число n означаваме

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n+1}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}\right).$$

Да се докаже, че $a_n \geq a_{n+1}$ за всяко естествено число n.

Решение. За удобство ще разглеждаме $a_{n-1} \geq a_n$ за $n \geq 2$. След изнасяне на $\sqrt[3]{n+1}$ като общ множител в a_n, желаното неравенство е еквивалентно на

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[3]{k} \geq \frac{(n-1)\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt[3]{n+1}-(n-1)\sqrt[3]{n}}. \qquad (*)$$

Ще докажем това с индукция по $n \geq 2$. Базата изисква $1 \geq \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$, което е така, понеже $\sqrt[3]{3} > 1.44$, $\sqrt[3]{2} < 1.26$ и $\sqrt[3]{4} < 1.6$. За стъпката е достатъчно да докажем, че

$$\sqrt[3]{n} + \frac{(n-1)\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt[3]{n+1}-(n-1)\sqrt[3]{n}} \geq \frac{n\sqrt[3]{(n+1)^2}}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}-n\sqrt[3]{n+1}}. \qquad (**)$$

След извършване на събирането в лявата страна и съкращаване на $n\sqrt[3]{n+1}$, вече искаме

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n+1}-(n-1)\sqrt[3]{n}} \geq \frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}-n\sqrt[3]{n+1}},$$

еквивалентно на (след освобождаване от знаменател и съкращаване на $\sqrt[3]{n(n+1)}$)

$$\sqrt[3]{(n+1)^2(n+2)} \geq \sqrt[3]{n^2(n+1)} + 1. \qquad (***)$$

Сега повдигаме на трета степен и искаме еквивалентното

$$3n^2+5n+1 \geq 3\sqrt[3]{n^2(n+1)}\left(\sqrt[3]{n^2(n+1)}+1\right). \qquad (****)$$

Нека реалното x е такова, че $\sqrt[3]{n^2(n+1)} = n+x$, т.е. $x^3+3x^2n+(3x-1)n^2=0$. Искаме да докажем $3n^2+5n+1 \geq 3(n+x)(n+x+1)$, т.е. $2n+1 \geq 6nx+3x^2+3x$. Да забележим, че от $x^3+3x^2n+(3x-1)n^2=0$ следват $3x^2n+(3x-1)n^2<0$, т.е. $n > 3nx+3x^2$, както и $(3x-1)n^2 < 0$, т.е. $x < \frac{1}{3}$. Оттук

$$2n+1 > 2(3nx+3x^2)+1 > 2(3nx+3x^2)+3x > 6nx+3x^2+3x$$

с което доказателството е завършено.

Оценяване. 1 т. за ясната идея да се подхожда по индукция, 1 т. за стартиране на индукцията от $(*)$, 1 т. за пълна проверка на базата на индукцията, 1 т. за достатъчността на $(**)$, 1 т. за достигане до $(***)$, 1 т. за достигане до $(****)$, 1 т. за въвеждането на x, 1 т. за $x < \frac{1}{3}$, 2 т. за $n > 3nx+3x^2$, 2 т. за довършване.

Задача 8. Да се намерят всички тройки (a, b, p) от естествени числа, където p е просто, такива че остатъците на числата an^2+bn, $n = 0, 1, \ldots, p-1$, при деление на p са два по два различни.

Отговор. p дели a и не дели b; $p = 2$ и a и b са с различна четност.

Решение. (Първи начин) При $n = 0$ изразът е 0 и се дели на p. За останалите n (взаимнопрости са с p) е необходимо $an+b$ да не се дели на p, което е невъзможно ако p не дели нито a, нито b, поради лемата на Безу.

- Ако p дели a, то ни интересуват остатъците на bn. Те са нули ако p не дели b и различни ако p не дели b, понеже $bm \equiv bn \pmod p \Leftrightarrow b(m-n) \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow m \equiv n \pmod p$.

- Ако p дели b, то ни интересуват остатъците на an^2. Ако $p \geq 3$, то $1 \neq p-1$, докато при $n = 1$ и $n = p - 1$ получаваме един и същи остатък, значи желаното не е изпълнено. При $p = 2$ директно е необходимо и достатъчно a да е нечетно.

Оценяване. 2 т. за напълно верен отговор (частични не се дават), 7 т. за отхвърляне на случая, когато p не дели нито a, нито b (от които 3 т. за недовършени идеи чрез лемата на Безу или съображения с пълна система от остатъци), 1 т. за пълно изследване на случая, когато p дели a, 2 т. за пълно изследване на случая, когато p дели b.