Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Финал, Тема за 8 – 9 клас

Задача 1. а) Да се намерят всички естествени числа $n \geq 3$ със следното свойство – които и неотрицателни реални числа $x_1, \ldots, x_n$ да изберем, поне едно от числата

$$x_1^2 + x_2^2,\ x_2^2 + x_3^2,\ \ldots,\ x_{n-1}^2 + x_n^2,\ x_n^2 + x_1^2$$

ще е по-малко или равно на поне едно от числата $2x_1x_2,\ 2x_2x_3,\ \ldots,\ 2x_{n-1}x_n,\ 2x_nx_1$.

б) Решете а), но за "които и реални числа" вместо "които и неотрицателни реални числа".

Задача 2. Съществува ли естествено число k, за което броят на четворките (a, b, c, n) от естествени числа, удовлетворяващи уравнението $a^5 + b^6 + c^{15} - n! = k$, е краен, но ненулев?

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I. Правите AI, BI и CI пресичат описаната около триъгълника ABC окръжност в точките A_1, B_1 и C_1. Правата през I, успоредна на BC, пресича правата B_1C_1 в точката A_2; точките B_2 и C_2 се дефинират аналогично. Да се докаже, че точките A_2, B_2 и C_2 лежат на една права.

Задача 4. Александра и Борис играят следната игра, редувайки се, като Александра започва първа. Първоначално на масата има две купчини с по n камъка. На всеки ход, ако на масата има a камъка в първата купчина и b във втората (a и b са естествени числа), то играчът може да извърши една от следните две операции:

- Да избере делител d на a (може да е равен на a), по-малък от b, да намали броя камъчета в първата купчина d пъти (т.е. той става $\frac{a}{d}$) и да премахне d камъчета от втората купчина (при което остават $b - d$ в нея).

- Да избере делител d на b (може да е равен на b), по-малък от a, да намали броя камъчета във втората купчина d пъти (т.е. той става $\frac{b}{d}$) и да премахне d камъчета от първата купчина (при което остават $a - d$ в нея).

Губи този, който не може да направи ход. В зависимост от стойността на n да се определи кой играч има печеливша стратегия.

Задача 5. Редицата $(a_n)_{n\geq 0}$ е такава, че $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = \min(2a_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3a_{\lfloor n/3 \rfloor}) + 1$ за всяко $n \geq 0$. Да се докаже, че $a_n \geq n$ за всяко $n \geq 0$. (*Със* $\lfloor t \rfloor$ *означаваме най-голямото цяло число, ненадминаващо* t. *Означаваме* $\min(a, b) = a$, *ако* $a \leq b$, *и* $\min(a, b) = b$, *ако* $a > b$.)

Задача 6. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се намери най-голямото естествено число M със следното свойство: за произволни различни естествени числа a_1, a_2, …, a_n със сбор M съществуват цели числа b_1, b_2, …, b_n, всяко равно на -2, -1, 0, 1 или 2 и не всички равни на 0, такива че $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$.

Задача 7. За всяко естествено число k да се определи дали броят на тройките (a, b, c) от естествени числа, такива че $a^k + 5b^k + 25c^k = 15abc + 1$, е краен или е безкраен.

Задача 8. Диагоналите на изпъкнал четириъгълник се пресичат в точка O и го разделят на четири триъгълника. Да се докаже, че центровете на вписаните им окръжности лежат на една окръжност тогава и само тогава когато центровете на външновписаните им срещу върха O окръжности лежат на една окръжност.