Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Финал, Тема за 8 – 9 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. а) Да се намерят всички естествени числа $n \geq 3$ със следното свойство – които и неотрицателни реални числа $x_1, \ldots, x_n$ да изберем, поне едно от числата

$$x_1^2 + x_2^2,\ x_2^2 + x_3^2,\ \ldots,\ x_{n-1}^2 + x_n^2,\ x_n^2 + x_1^2$$

ще е по-малко или равно на поне едно от числата $2x_1x_2,\ 2x_2x_3,\ \ldots,\ 2x_{n-1}x_n,\ 2x_nx_1$.

б) Решете а), но за "които и реални числа" вместо "които и неотрицателни реални числа".

Отговор. а) всички нечетни n б) няма такива n

Решение. а) За четно n е достатъчно да изберем $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = 1$ и $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = 0$. За нечетно n да разгледаме разликите $x_{k+1} - x_k$ и да забележим, че има две последователни с еднакъв знак – така без ограничение $x_{j+2} \geq x_{j+1} \geq x_j$ за някое j (случаят $\leq$ е аналогичен). Оттук $x_j^2 + x_{j+1}^2 \leq 2x_{j+1}^2 \leq 2x_{j+1}x_{j+2}$ и исканото е доказано.

б) Четните n отхвърляме както в а), а нечетните n например с $(-1), 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0$.

Оценяване. 3 т. за пример за четно n с неотрицателни реални числа (от които 2 т. ако има отрицателни); 2 т. за пример за нечетно n в б); 7 т. за нечетно n в а), от които 3 т. за съществено използване на нечетността. При други решения: 9 т. за а) (от които 2 т. за пример и 3 т. за съществено използване на нечетността) и 3 т. за б).

Задача 2. Съществува ли естествено число k, за което броят на четворките (a, b, c, n) от естествени числа, удовлетворяващи уравнението $a^5 + b^6 + c^{15} - n! = k$, е краен, но ненулев?

Решение. Да разгледаме уравнението по модул 31. (Мотивацията за това е, че x^d приема най-много $\frac{p-1}{d} + 1$, т.е. не голям брой, различни стойности, когато d дели $p - 1$ за просто p, тъй като $(x^d)^{\frac{p-1}{d}} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ от Малката теорема на Ферма.)

Имаме $a^5 \equiv 0, 1, 5, 6, 25, 26, 30$, $b^6 \equiv 0, 1, 2, 4, 8, 16$ (пресметнете за $0 \leq a, b \leq 15$). Оттук

$$\begin{aligned}
a^5 + b^6 \equiv\ & 0, 1, 5, 6, 30, 26, 25 \\
& 1, 2, 6, 7, 0, 27, 26 \\
& 2, 3, 7, 8, 1, 28, 27 \\
& 4, 5, 9, 10, 3, 30, 29 \\
& 8, 9, 13, 14, 7, 3, 2 \\
& 16, 17, 22, 15, 11, 10
\end{aligned}$$

и в частност, никоя от стойностите 18, 19, 20 не се среща. От друга страна, имаме $c^{15} \equiv 0, 1, 30 \pmod{31}$, понеже $c^{30} \equiv 0, 1 \pmod{31}$ от Малката теорема на Ферма и $c^{30} - 1 = (c^{15} - 1)(c^{15} + 1)$ се дели на простото число 31 точно когато един от двата множителя се дели на 31. Следователно сравнението $a^5 + b^6 + c^{15} \equiv 19 \pmod{31}$ няма решение.

Значи ще търсим подходящо $k \equiv 19 \pmod{31}$. Наистина, за всяко такова k при $n \geq 31$ уравнението няма решение поради горното сравнение, а за всяко $n \leq 30$ имаме $a^5, b^6, c^{15} <$

$n!+k$, т.е. има краен брой възможности за всяко от a, b, c и значи краен брой възможности за четворката (a,b,c,n).

Остава да намерим $k \equiv 19 \pmod{31}$, при което уравнението има поне едно решение. За улеснение ще търсим решение с $b=c=1$ и $a^5 - n! \equiv 17 \pmod{31}$. Последното се удовлетворява например от $a=11$ и $n=8$, съответстващи на $k = 11^5 - 8! + 2 = 120733$.

Оценяване. 2 т. за деклариране на работещо k и 10 т. за доказването му; при горното решение десетте точки са както следва: 4 т. за разглеждане на модул 31, 3 т. за обосновка, че няма решение за $k \equiv 19 \pmod{31}$ и $n \geq 31$, 1 т. за обосновка за краен брой решения при фиксирано k и ограничението $n \leq 30$, 2 т. за търсене на работещо k чрез сравнение, което има решение и в което участват n и най-много едно a, b, c.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I. Правите AI, BI и CI пресичат описаната около триъгълника ABC окръжност в точките A_1, B_1 и C_1. Правата през I, успоредна на BC, пресича правата B_1C_1 в точката A_2; точките B_2 и C_2 се дефинират аналогично. Да се докаже, че точките A_2, B_2 и C_2 лежат на една права.

Решение. От успоредността и описаната окръжност получаваме $\sphericalangle A_2IB_1 = \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle CC_1B_1 = \sphericalangle IC_1A_2$, откъдето $\triangle IA_2B_1 \sim \triangle C_1A_2I$. Така $\dfrac{A_2B_1}{A_2I} = \dfrac{B_1I}{C_1I} = \dfrac{A_2I}{A_2C_1}$ и изразяване на A_2I води до $\dfrac{A_2B_1}{A_2C_1} = \left(\dfrac{B_1I}{C_1I}\right)^2$. С умножаване с аналогичните за B_2 и C_2, исканото следва от теоремата на Менелай, приложена за триъгълника $A_1B_1C_1$.

Коментар. Може да се докаже (по-трудно), че правата $A_2B_2C_2$ е перпендикулярна на OI, където O е центърът на описаната около ABC окръжност.

Оценяване. 4 т. за $\triangle IA_2B_1 \sim \triangle C_1A_2I$ (от които 2 т. за $\sphericalangle A_2IB_1 = \sphericalangle IC_1A_2$), 4 т. за $\dfrac{A_2B_1}{A_2C_1} = \left(\dfrac{B_1I}{C_1I}\right)^2$, 4 т. за довършване.

Задача 4. Александра и Борис играят следната игра, редувайки се, като Александра започва първа. Първоначално на масата има две купчини с по n камъка. На всеки ход, ако на масата има a камъка в първата купчина и b във втората (a и b са естествени числа), то играчът може да извърши една от следните две операции:

- Да избере делител d на a (може да е равен на a), по-малък от b, да намали броя камъчета в първата купчина d пъти (т.е. той става $\frac{a}{d}$) и да премахне d камъчета от втората купчина (при което остават $b-d$ в нея).
- Да избере делител d на b (може да е равен на b), по-малък от a, да намали броя камъчета във втората купчина d пъти (т.е. той става $\frac{b}{d}$) и да премахне d камъчета от първата купчина (при което остават $a-d$ в нея).

Губи този, който не може да направи ход. В зависимост от стойността на n да се определи кой играч има печеливша стратегия.

Отговор. Ако n се дели на 4, то печели Александра; в противен случай печели Борис.

Решение. (Първи начин) С (x,y) ще означаваме ситуацията, в която в купчината на Александра (A) има x камъка и в тази на Борис (B) има y. По индукция имаме, че $(1,x)$ е печеливша точно когато x е четно (и аналогично за $(x,1)$). Наистина, при $x=1$ не можем да направим ход (това е единствената такава позиция в играта), а иначе единственият възможен ход е от $(1, x)$ към $(1, x-1)$.

Нататък, че докажем с индукция по k, че $(2, 2k)$ е губеща позиция, откъдето ще следва, че A печели за $n = 4k$, като на първия си ход избере делителя $2k$. При $k = 1$ от $(2, 2)$ можем да стигнем само до $(2, 1)$ или $(1, 2)$, които са губещи. В общия случай е възможно едно от следните три: от $(2, 2k)$ играчът на ход отива в $(2, 2k-1)$, а оттам следващия – в $(2, 2k-2)$, което е губещо; отива в $(1, 2k-2)$, което е печелившо за следващия; отива в $(1, 2k)$, което е печелившо за следващия. Отбелязваме, че от тук следва, че $(2, 2k+1)$ е печеливша позиция за всяко k.

За останалите случаи за n ще използваме, че $n - d > \frac{n}{d}$ за всеки делител d на n, различен от 1, $\frac{n}{2}$ и n. Наистина, такъв делител не надминава $\frac{n}{3}$, значи $n - d \geq \frac{2n}{3} > \frac{n}{2} \geq \frac{n}{d}$.

Нека $n \geq 3$ е нечетно ($n = 1$ вече проверихме в началото). Ходът на A води до двойка от вида $\left(\frac{n}{d}, n-d\right)$. Ако $d = 1$, то B избира делителят $n-1$ на $n-1$ и дава $(1, 1)$ на A. Значи A трябва да избере $d \neq 1, n, \frac{n}{2}$ и ще даде на B двойката $(\frac{n}{d}, n-d)$, за което (съгласно по-горе) $\frac{n}{d} < n - d$. Така B може да избере $\frac{n}{d}$, достигайки до $\left(1, n-d-\frac{n}{d}\right)$, като $n - d - \frac{n}{d}$ е нечетно за нечетни n и d. Окончателно A губи при нечетно n.

Нека $n = 2s$ за нечетно s. Ходът на A води до двойка от вида $\left(\frac{n}{d}, n-d\right)$. Ако $d = 1$, то B избира делителят $n-1$ на $n-1$ и дава $(1, 1)$ на A. Ако $d = s$, то двойката е $(2, s)$ и B печели съгласно по-горе. Значи A трябва да избере $d \neq 1, n, \frac{n}{2}$ и ще даде на B двойката $(\frac{n}{d}, n-d)$, за което (съгласно по-горе) $\frac{n}{d} < n-d$. Така B може да избере $\frac{n}{d}$, достигайки до $\left(1, n-d-\frac{n}{d}\right)$, като $n-d-\frac{n}{d}$ е нечетно, понеже точно едно от d и $\frac{n}{d}$ е нечетно за $n \equiv 2 \pmod 4$. Окончателно A губи при $n \equiv 2 \pmod 4$.

(Втори начин, Мария Дренчева) Ще докажем по индукция, че всички (четно, нечетно) позиции са печеливши, а всички (нечетно, нечетно) са губещи, като индукцията ще е по максималното от двете числа в двойката. Както в първото решение виждаме, че (1, четно) е печеливша и (1, нечетно) е губеща (това е базата). Сега да отбележим, че от (нечетно нечетно) с един ход винаги се стига до (четно, нечетно) със следващия ход и понеже всички (четно, нечетно) надолу са губещи от индукционната хипотеза, то (нечетно, нечетно) е губеща. От друга страна, от (четно, нечетно), като изберем делителя 1, стигаме до (нечетно, нечетно), което е губеща, значи (четно, нечетно) е печеливша.

Остава да се справим със случая $(4k+2, 4k+2)$. Обаче от тук се стига задължително до (четно, нечетно), което е печеливша позиция, значи $(4k+2, 4k+2)$ е губеща.

Оценяване. 0 т. за верен отговор, 1 т. за класифициране на всички $(1, x)$ и $(x, 1)$, 4 т. за доказателство, че A печели, когато 4 дели n (от които 1 т. за редукцията до $(2, 2k)$ и по 1 т. за всеки от трите случая, но доказателство, че $(2, 2k)$ е печеливша позиция, без редукцията до това, носи само 1 т.), 1 т. за отбелязване на $n - d > \frac{n}{d}$ при $d \neq 1, \frac{n}{2}, n$ (или формулиране на подходяща индукция за оставащите n), 3 т. за доказателство, че B печели, когато n е нечетно, 3 т. за доказателство, че B печели, когато $n \equiv 2 \pmod 4$.

Задача 5. Редицата $(a_n)_{n\geq 0}$ е такава, че $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = \min(2a_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3a_{\lfloor n/3 \rfloor}) + 1$ за всяко $n \geq 0$. Да се докаже, че $a_n \geq n$ за всяко $n \geq 0$. (*Със* $\lfloor t \rfloor$ *означаваме най-голямото цяло число, ненадминаващо* t. *Означаваме* $\min(a, b) = a$, *ако* $a \leq b$, *и* $\min(a, b) = b$, *ако* $a > b$.)

Решение. Ще докажем всъщност, че $a_n \geq n + 1$ за всяко $n \geq 0$ със силна индукция. При $n = 0$ имаме равенство. За стъпката имаме $2a_{\lfloor n/2 \rfloor} \geq 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \geq 2\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = n + 1$ и $3a_{\lfloor n/3 \rfloor} \geq 3\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1\right) \geq 3\left(\frac{n-2}{3} + 1\right) = n + 1$, откъдето окончателно

$$a_{n+1} = \min(2a_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3a_{\lfloor n/3 \rfloor}) + 1 \geq (n+1) + 1 = n + 2$$

както се искаше.

Оценяване. 1 т. за намерението да се разсъждава със силна индукция, 2 т. за формулиране на хипотезата $a_n \geq n+1$, 3 т. за доказване на $2a_{\lfloor n/2 \rfloor} \geq n+1$, 4 т. за доказване на $3a_{\lfloor n/3 \rfloor} \geq n+1$, 2 т. за довършване.

Задача 6. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се намери най-голямото естествено число M със следното свойство: за произволни различни естествени числа a_1, a_2, …, a_n със сбор M съществуват цели числа b_1, b_2, …, b_n, всяко равно на -2, -1, 0, 1 или 2 и не всички равни на 0, такива че $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$.

Отговор. $\dfrac{3^n-3}{2}$

Решение. Ако изберем $a_i = 3^{i-1}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$, то сборът е $1+3+3^2+\cdots+3^{n-1} = \dfrac{3^n-1}{2}$ и исканото е невъзможно по модул 3^{A+1}, където A е минимално, такова че b-коефициентът на 3^A е ненулев (или защото всяко естествено число се представя по единствен начин в троична бройна система, съответно всеки две такива представяния са различни).

Ще докажем, че исканото е изпълнено за $M \leq \dfrac{3^n-3}{2}$. При дадени a_i, за $c_i \in \{0,1,2\}$ стойностите на сбора $\sum_{i=1}^n a_ic_i$ са между 0 и $2M \leq 3^n - 3$, т.е. има не повече от $3^n - 2$ възможности за тях. От друга страна, броят възможности за съвкупността от коефициенти c_i е 3^n. Значи от принципа на Дирихле има стойност, която се среща два пъти, съответно тя дава връзка от вида $\sum_{i=1}^n a_ic_i = \sum_{i=1}^n a_ic_i'$, еквивалентна на $\sum_{i=1}^n a_ib_i = 0$ за $b_i \in \{-2,-1,0,1,2\}$, като не всички b_i-та са нули, понеже $c_i \neq c_i'$ за поне едно i.

Оценяване. 1 т. за верен отговор, 1 т. за пример, 2 т. за проверката му, 8 т. за оценката, от които 2 т. за ограничаване на броя на стойностите на $\sum_{i=1}^n a_ic_i$, 2 т. за преброяване на възможностите за коефициентите, 2 т. за извод с Дирихле от последните две и 2 т. за довършване.

Задача 7. За всяко естествено число k да се определи дали броят на тройките (a,b,c) от естествени числа, такива че $a^k + 5b^k + 25c^k = 15abc + 1$, е краен или е безкраен.

Отговор. Краен за $k = 1$ и $k \geq 4$; безкраен за $k = 2$ и $k = 3$.

Решение. При $k = 1$ имаме $a + 5b + 25c = abc + 1$ и ако $x = \max(a,b,c)$, то $31x > a + 5b + 25c > abc$, съответно две от променливите са с произведение най-много 31 (в частност, има краен брой възможности за тях). Тъй като при дадени стойности на две от променливите има най-много една възможност за третата (понеже са от първа степен и случаите $bc = 1$, $ac = 5$, $ab = 25$ не водят до решения), то броят решения тук е краен.

При $k \geq 4$ лявата страна е поне $5\sqrt[3]{(abc)^k}$ от неравенството между средноаритметично и средногеометрично, а дясната е не повече от $16abc$, значи $abc < 33$, съответно за (a,b,c) има краен брой възможности.

Нека $k = 2$. Ще докажем, че уравнението има безбройно много решения с $c = 2$, т.е. $a^2 + 5b^2 + 99 = 30ab$ има безбройно много решения за a и b. Уравнението е еквивалентно на $t^2 - 220b^2 = -99$, където $t = a - 15b$ Едно решение е $a = 11$, $b = 1$. Сега е достатъчно да намерим естествени константи A, B, C, D, които са естествени числа и са такива, че ако (t,b) е решение, то $(At+Bb, Ct+Db)$ също е решение – по този начин директно генерираме безкрайна верига от решения. Равенството

$$(At + Bb)^2 - 220(Ct + Db)^2 = -99 = t^2 - 220b^2$$

е изпълнено за произволни t и b точно когато $A^2-220C^2=1$, $B^2-220D^2=-220$, $2(AB-220CD)=0$. Една възможност е от първото уравнение да се види $C=6$, съответстващо на $A=89$, и тогава другите две уравнения водят до $D=89$ и $B=13320$.

Нека $k=3$. Ще докажем, че уравнението има безбройно много решения. Едно такова е $a=41$, $b=24$, $c=14$ (по-малко решение, но с отрицателно число, е $a=1$, $b=-4$, $c=2$). Ще намерим положителни константи $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3$, такива че ако (a,b,c) е решение, то $(x_1a+y_1b+z_1c, x_2a+y_2b+z_2c, x_3a+y_3b+z_3c)$ също е. Необходимо и достатъчно е

$$\begin{aligned}&(x_1a+y_1b+z_1c)^3+5(x_2a+y_2b+z_2c)^3+25(x_3a+y_3b+z_3c)^3\\&-15(x_1a+y_1b+z_1c)(x_2a+y_2b+z_2c)(x_3a+y_3b+z_3c)\end{aligned}$$

да е тъждествено на $a^3+5b^3+25c^3-15abc$. Коефициентът при a^3 е $x_1^3+5x_2^3+25x_3^3-15x_1x_2x_3=1$, така че нека $x_1=41$, $x_2=21$, $x_3=14$. Коефициентът пред b_3 $y_1^3+5y_2^3+25y_3^3-15y_1y_2y_3=5$, значи нека $y_1=70$, $y_2=41$, $y_3=21$. Коефициентът пред c^3 е $z_1^3+5z_2^3+25z_3^3-15z_1z_2z_3=25$, значи нека $z_1=120$, $z_2=70$, $z_3=41$. Сега разкриване на скобите показва, че желаното тъждество наистина е вярно.

Оценяване. 1 т. за случая $k=1$, 2 т. за случая $k=4$, 4 т. за случая $k=2$ (от които 2 т. за идеята да се направи подходяща каскада или намери подходящо уравнение на Пел), 5 т. за случая $k=3$ (от които 1 т. за намиране на поне едно решение, 2 т. за формулиране на подходяща каскада с неизвестни коефициенти и 2 т. за намиране на коефициентите).

Задача 8. Диагоналите на изпъкнал четириъгълник се пресичат в точка O и го разделят на четири триъгълника. Да се докаже, че центровете на вписаните им окръжности лежат на една окръжност тогава и само тогава когато центровете на външновписаните им срещу върха O окръжности лежат на една окръжност.

Решение. Първо ще докажем следната:

Лема. За всеки триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I и център на външновписаната окръжност J е изпълнено равенството $CI \cdot CJ = AC \cdot BC$.

Доказателство. Еквивалентното $\dfrac{AC}{CI}=\dfrac{CJ}{BC}$ следва от $\triangle AIC \sim \triangle JBC$, поради $\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCJ = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle CJB = 180^\circ-(90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle ABC)-\frac{1}{2}\sphericalangle ACB=\frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle IAC$.

Сега към задачата. Четириъгълникът е $ABCD$, като I_1,I_2,I_3,I_4 са центровете на вписаните окръжности в триъгълниците AOB, BOC, COD, DOA и J_1,J_2,J_3,J_4 са центровете на външновписаните срещу O окръжности. Явно I_1,J_1,I_3,J_3 лежат на ъглополовящата на $\sphericalangle AOB$, а I_2,J_2,I_4,J_4 – на тази на $\sphericalangle BOC$. От лемата имаме $OA\cdot OB = OI_1\cdot OJ_1$ и $OC\cdot OD = OI_3\cdot OJ_3$, откъдето $OI_1\cdot OI_3\cdot OJ_1\cdot OJ_3 = OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD$. Аналогично $OI_2\cdot OI_4\cdot OJ_2\cdot OJ_4 = OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD$ и значи

$$OI_1\cdot OI_3\cdot OJ_1\cdot OJ_3 = OI_2\cdot OI_4\cdot OJ_2\cdot OJ_4.$$

От съображения за степен на точка, I_1,I_2,I_3,I_4 лежат на една окръжност точно когато $OI_1\cdot OI_3 = OI_2\cdot OI_4$, което е точно когато $OJ_1\cdot OJ_3 = OJ_2\cdot JI_4$, а това е еквивалентно на J_1,J_2,J_3,J_4 да лежат на една окръжност.

Оценяване. 3 т. за формулиране на лемата, 2 т. за нейното доказване, 3 т. за $OI_1\cdot OI_3\cdot OJ_1\cdot OJ_3 = OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD$, 2 т. за $OI_1\cdot OI_3\cdot OJ_1\cdot OJ_3 = OI_2\cdot OI_4\cdot OJ_2\cdot OJ_4$, 2 т. за довършване.